DISPENSA MATEMATICA GENERALE

SECONDO PARZIALE 2011-2012

CALCOLO DIFFERENZIALE CON UNA VARIABILE

REGOLE DI DERIVAZIONE

Considerata una funzione f(x), la sua derivata si indica con f ' (x), y' oppure con dy/dx.

Derivate elementari

1) $y = k \Rightarrow y' = 0$

2) $y = kx \Rightarrow y' = k$

3) $y = x^{\alpha} \Rightarrow y' = \alpha \cdot x^{\alpha-1}$

4) $y = \sqrt{x} \Rightarrow y' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

5) $y = \sqrt[n]{x} \Rightarrow y' = \dfrac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$

6) $y = e^{x} \Rightarrow y' = e^{x}$

7) $y = a^{x} \Rightarrow y' = a^{x} \cdot \ln a$

8) $y = \ln x \Rightarrow y' = \dfrac{1}{x}$

9) $y = \log_a x \Rightarrow y' = \dfrac{1}{x \ln a}$

10) $y = \operatorname{sen} x \Rightarrow y' = \cos x$

11) $y = \cos x \Rightarrow y' = -\operatorname{sen} x$

12) $y = \operatorname{tg} x \Rightarrow y' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$

13) $y = \operatorname{cotg} x \Rightarrow y' = -\dfrac{1}{\operatorname{sen}^2 x}$

14) $y = \operatorname{arcsen} x \Rightarrow y' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

15) $y = \arccos x \Rightarrow y' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

16) $y = \operatorname{arctg} x \Rightarrow y' = \dfrac{1}{1+x^2}$

17) $y = \operatorname{arccotg} x \Rightarrow y' = -\dfrac{1}{1+x^2}$

18) $y = x^{x} = e^{x \ln x} \Rightarrow y' = x^{x}(\ln x + 1)$

Derivate composte

$y = k \cdot f(x) \Rightarrow y' = k \cdot f'(x)$

$y = [f(x)]^{\alpha} \Rightarrow y' = \alpha \cdot f(x)^{\alpha-1} \cdot f'(x)$

$y = \sqrt{f(x)} \Rightarrow y' = \dfrac{1}{2\sqrt{f(x)}} \cdot f'(x)$

$y = \sqrt[n]{f(x)} \Rightarrow y' = \dfrac{1}{n\sqrt[n]{f(x)^{n-1}}} \cdot f'(x)$

$y = e^{f(x)} \Rightarrow y' = e^{f(x)} \cdot f'(x)$

$y = a^{f(x)} \Rightarrow y' = a^{f(x)} \cdot \ln a \cdot f'(x)$

$y = \ln f(x) \Rightarrow y' = \dfrac{1}{f(x)} \cdot f'(x)$

$y = \log_a f(x) \Rightarrow y' = \dfrac{1}{f(x) \cdot \ln a} \cdot f'(x)$

$y = \operatorname{sen} f(x) \Rightarrow y' = \cos f(x) \cdot f'(x)$

$y = \cos f(x) \Rightarrow y' = -\operatorname{sen} f(x) \cdot f'(x)$

$y = \operatorname{tg} f(x) \Rightarrow y' = \dfrac{1}{\cos^2 f(x)} \cdot f'(x)$

$y = \operatorname{cotg} f(x) \Rightarrow y' = -\dfrac{1}{\operatorname{sen}^2 f(x)} \cdot f'(x)$

$y = \operatorname{arcsen} f(x) \Rightarrow y' = \dfrac{1}{\sqrt{1-f(x)^2}} \cdot f'(x)$

$y = \arccos f(x) \Rightarrow y' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-f(x)^2}} \cdot f'(x)$

$y = \operatorname{arctg} f(x) \Rightarrow y' = \dfrac{1}{1+f(x)^2} \cdot f'(x)$

$y = \operatorname{arccotg} f(x) \Rightarrow y' = -\dfrac{1}{1+f(x)^2} \cdot f'(x)$

$y = f(x)^{g(x)} \Rightarrow y' = f(x)^{g(x)}\left[g'(x) \cdot \ln f(x) + \dfrac{f'(x)}{f(x)} \cdot g(x)\right]$

Da ricordare nel calcolo delle derivate

1. $y = f(x) \pm g(x)$ -------> $y' = f'(x) \pm g'(x)$
2. $y = k \cdot f(x)$ --------> $y' = k \cdot f'(x)$
3. $y = f(x) \cdot g(x)$ --------> $y' = f'(x) \cdot g(x) + g'(x) \cdot f(x)$
4. $y = \dfrac{f(x)}{g(x)}$ --------> $y' = \dfrac{f'(x) \cdot g(x) - g'(x) \cdot f(x)}{[g(x)]^2}$

RAPPORTO INCREMENTALE

Si definisce <u>rapporto incrementale</u> di una funzione, il rapporto tra la variazione della funzione e la variazione della variabile indipendente x, e si indica con $\Delta y/\Delta x$.

Graficamente rappresenta il coefficiente angolare della retta C, secante di AB.

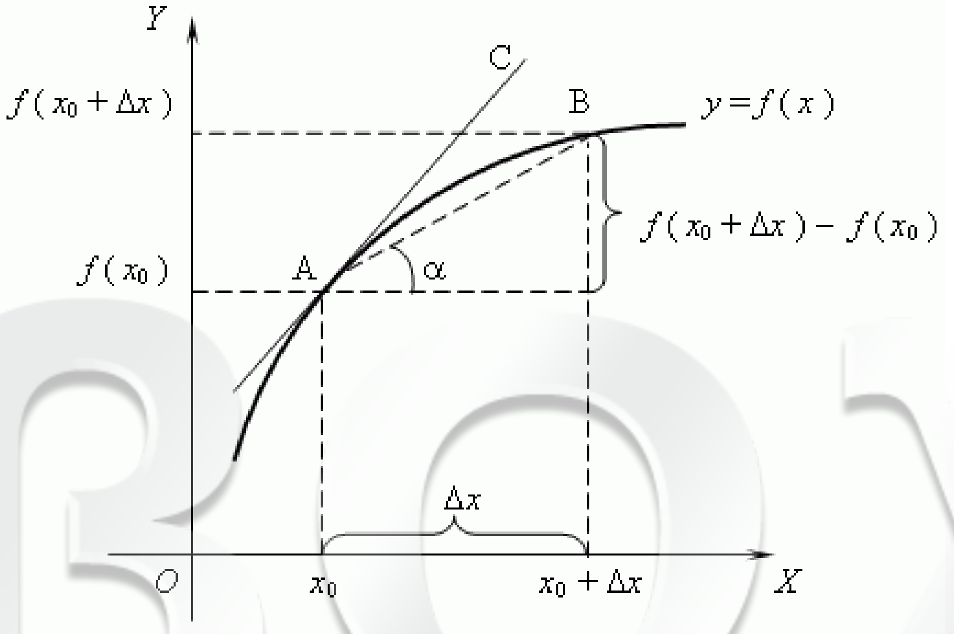


Fig. 1

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_o+h)-f(x_o)}{h}$$

(rapporto incrementale nel punto x_o)

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

(formula generale del rapporto incrementale)

Esercizio svolto:

Data la funzione y=ln(x+3e^x) se ne calcoli il rapporto incrementale nel punto x_0=0 relativo ad un generico incremento h.

Si ha che: f(x_0)=f(0)=ln3 e che $f(x_0+h)=f(0+h)=\ln(h+3e^h)$ dunque applicando la formula otteniamo facilmente che: $\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\ln(h+3e^h)\ +\ln 3}{h}$

DERIVATA

La derivata prima di una funzione f(x) nel punto x_o è il limite, se esiste finito, del rapporto incrementale al tendere a zero dell'incremento dato alla variabile indipendente.

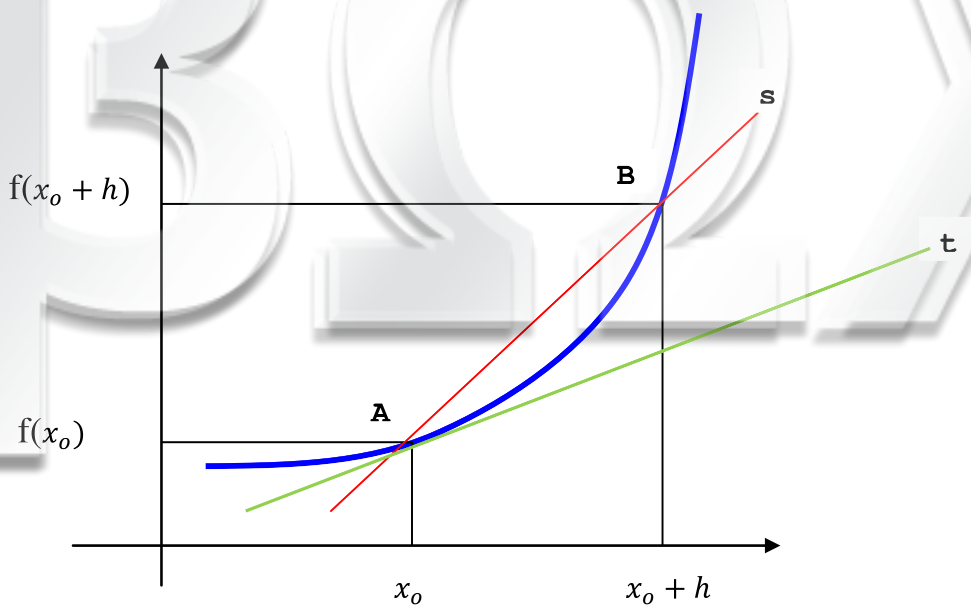
$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_o+h)-f(x_o)}{h} = f'(x_o)$$

se esiste finito.

Mentre la derivata generica di f(x) al variare di x è: $\lim_{h \to 0} \frac{f(x_o+h)-f(x_o)}{h} = f'(x_o)$

SIGNIFICATO GEOMETRICO DI DERIVATA

La derivata prima della funzione in x_o è il coefficiente angolare della retta tangente al grafico di f(x) nel suo punto di ascissa x_o.



Graficamente rappresenta dunque il coefficiente angolare della retta t, tangente alla funzione nel punto A. **f '(x_o) → m tangente in (x_o)**

Si osservi invece che il rapporto incrementale è la pendenza della retta s, secante AB.

Dunque se: h → 0 ⟹ B → A ossia $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ (m secante) → m tangente

-Equazione della tangente in un punto ad una funzione data:

Tenendo presente l'equazione del fascio di rette per un punto x_0 è :

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

e ricordando che f ' $(x_0) = m$ si ottiene che:

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$$

DERIVABILITA'

Una funzione f(x) è derivabile in un punto x_0 se:

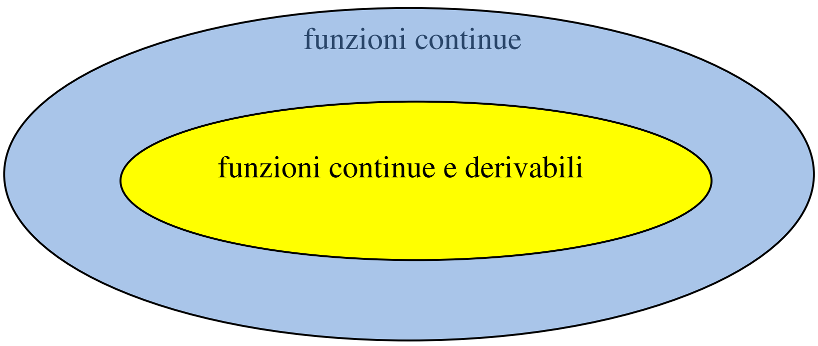
1. **è ivi continua**
2. **esiste finito il limite destro del rapporto incrementale $\lim_{h\to 0^+} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = f'_+(x_0)$**
3. **esiste finito il limite sinistro del rapporto incrementale $\lim_{h\to 0^-} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = f'_-(x_0)$**
4. **i due limiti sono uguali**

Relazione tra continuità e derivabilità

- **Se f è derivabile in un punto x_0 $\Longrightarrow$ è necessariamente continua**
- **Se f è continua in x_0 non è detto che sia derivabile (vedi caso di punto angoloso)**

Esempio punto angoloso.

f(x) differenziabile $\Longleftrightarrow$ f(x) derivabile

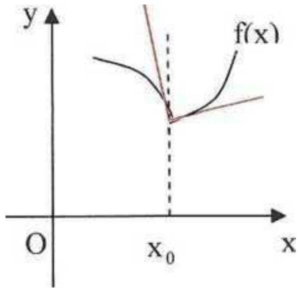


PUNTI DI NON DERIVABILITA'

Punti ANGOLOSI

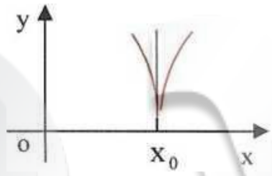
$$\begin{cases} \lim_{h\to 0^+} \frac{f(x_o+h)-f(x_o)}{h} = f'_+ \quad (x_o) \\ \lim_{h\to 0^-} \frac{f(x_o+h)-f(x_o)}{h} = f'_- \quad (x_o) \end{cases}$$

Esistono entrambi finiti, ma assumono valori diversi

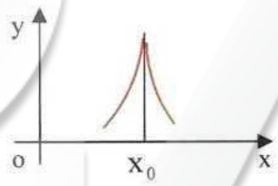


Punti di CUSPIDE

1. $$\begin{cases} \lim_{h\to 0^+} \frac{f(x_o+h)-f(x_o)}{h} = +\infty \\ \lim_{h\to 0^-} \frac{f(x_o+h)-f(x_o)}{h} = -\infty \end{cases}$$

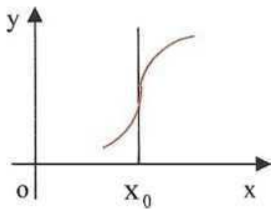


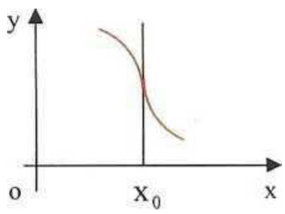
2. $$\begin{cases} \lim_{h\to 0^+} \frac{f(x_o+h)-f(x_o)}{h} = -\infty \\ \lim_{h\to 0^-} \frac{f(x_o+h)-f(x_o)}{h} = +\infty \end{cases}$$



Flesso a TANGENTE VERTICALE

1. $$\begin{cases} \lim_{h\to 0^+} \frac{f(x_o+h)-f(x_o)}{h} = +\infty \\ \lim_{h\to 0^-} \frac{f(x_o+h)-f(x_o)}{h} = +\infty \end{cases}$$





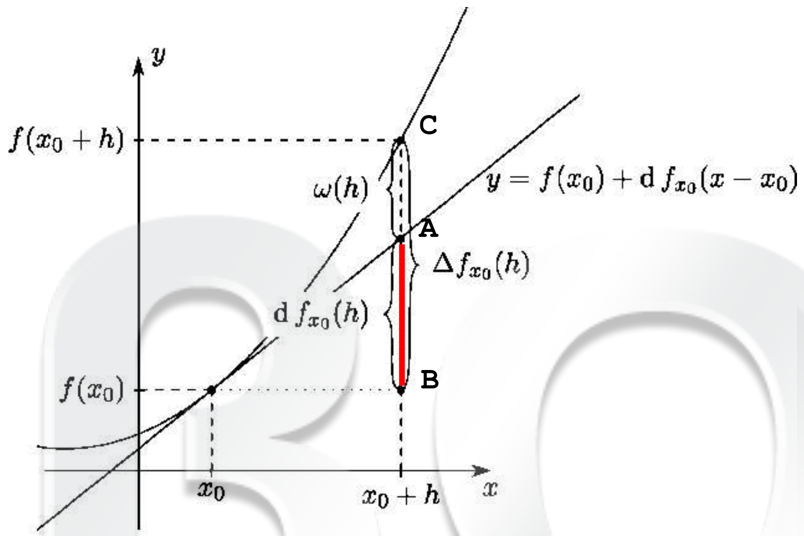
2. $$\begin{cases} \lim_{h\to 0^+} \frac{f(x_o+h)-f(x_o)}{h} = -\infty \\ \lim_{h\to 0^-} \frac{f(x_o+h)-f(x_o)}{h} = -\infty \end{cases}$$

DIFFERENZIABILITA'

Una funzione si definisce differenziabile in un punto x_o se verifica la seguente equazione

$$\boxed{f(x) - f(x_o) = \underbrace{f'(x_o)\cdot(x - x_o)}_{df(x_o)\text{ differenziale primo}} + \underbrace{o\,(x\text{-}x_o)}_{\text{infinitesimo per } x\to x_o}}$$

Significato geometrico



AB = $df(x_o)$ differenziale

AC = $o(x - x_o)$ infinitesimo per x→ x_o

BC = incremento funzione

La differenziabilità rappresenta l'approssimazione lineare di f(x) in un punto x_o

Significato geometrico del differenziale:

Il differenziale di una funzione f(x) nel punto x_o , relativo ad un incremento h della variabile indipendente, è l'incremento che subisce la tangente.

$f(x)$ è differenziabile in x_o se e solo se è ivi derivabile

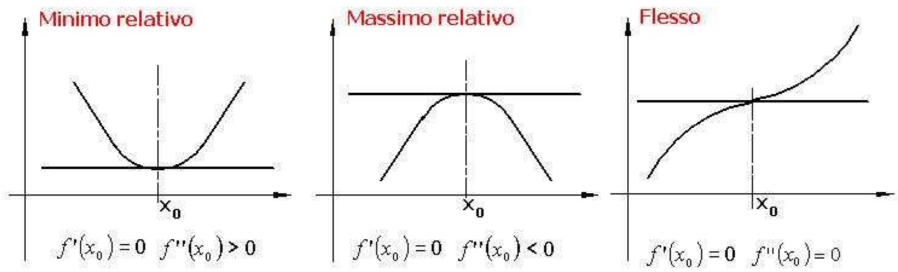
f differenziabile $\Longleftrightarrow$ f derivabile

PUNTI STAZIONARI

Se una funzione è derivabile in x_0 ed è tale che f $'(x_0) = 0$, allora il punto x_0 si chiama punto stazionario (è un punto in cui la tangente alla curva è parallela all'asse delle ascisse).

Si distinguono i seguenti casi:

1. Massimo locale
2. Minimo locale
3. Flesso a tangente orizzontale ascendente
4. Flesso a tangente orrizzontale discendente



Relazione tra il segno della derivata a la funzione

f '(x) $\geq$ 0 $\forall$x $\in$ I $\Leftrightarrow$ f crescente in I
f '(x) $\leq$ 0 $\forall$x $\in$ I $\Leftrightarrow$ f decrescente in I
f '(x) $=$ 0 $\forall$x $\in$ I $\Leftrightarrow$ f costante in I

PRIMO TEST DI RICONOSCIMENTO DEI PUNTI STAZIONARI

Sia in x_0 : $\begin{cases} f(x)\ derivabile \\ f'(x_0) = 0 \end{cases}$ se si ha:

x_0 PUNTO DI MASSIMO RELATIVO

x< x_0 $\Rightarrow$ f ' (x) > 0 $\rightarrow$ f cresce e x $> x_0$ $\Rightarrow$ f ' (x) < 0 $\rightarrow$ f decresce

x_0 PUNTO DI MINIMO RELATIVO

x< x_0 $\Rightarrow$ f ' (x) < 0 $\rightarrow$ f decresce e x $> x_0$ $\Rightarrow$ f ' (x) > 0 $\rightarrow$ f cresce

TEOREMA DI FERMAT

Data una funzione f(x) definita in I

se e se	-$x_0 \in I$ è un punto di massimo o minimo locale - $\exists\, f'(x_0)$	$\Longrightarrow$	$f'(x_0) = 0$ necessariamente

DIMOSTRAZIONE

Ipotizzando che per la funzione f(x), x_0 sia un punto di minimo locale , potremo scrivere che
$f(x_0 + h) - f(x_0) \geq 0$ per definizione di minimo locale e per valori abbastanza piccoli dell'incremento.

Da cui otteniamo che:

$$\frac{f(x_o+h)-f(x_o)}{h} \geq 0 \text{ per } h > 0$$

$$\frac{f(x_o+h)-f(x_o)}{h} \leq 0 \text{ per } h < 0$$

Applicando il limite per h→ 0 e ricordando che f(x) è derivabile per ipotesi si ha:

$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(x_o+h)-f(x_o)}{h} = f'_+ \ (x_o) \geq 0$ per il teorema della permanenza del segno

$\lim_{h\to 0^-} \frac{f(x_o+h)-f(x_o)}{h} = f'_- \ (x_o) \ \leq 0$ per il teorema della permanenza del segno

Ma poichè per definizione di derivata deve essere: $f'_-(x_0) = f'_+(x_0)$ e questo si ottiene solo se:

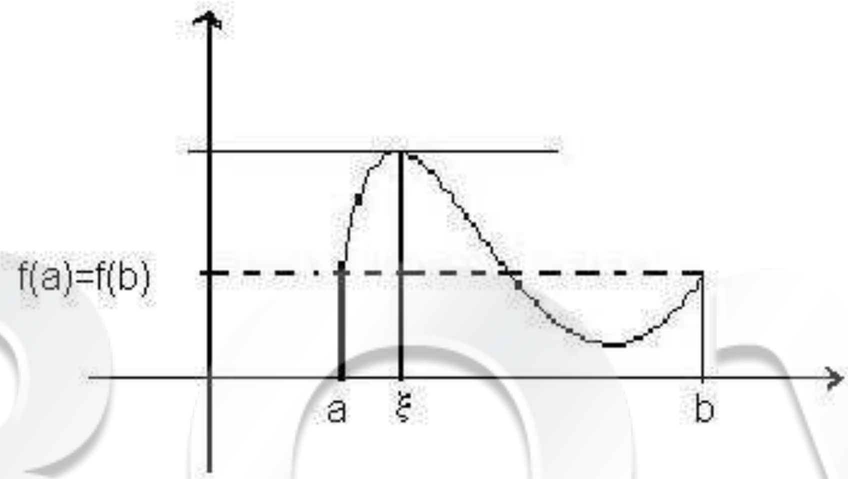
$\mathbf{f'_-(x_0) = f'_+(x_0) = 0} \Longrightarrow \boldsymbol{f'(x_0) = 0}$ **c.v.d.**

RICORDA:
Il teorema di Fermat non ammette inverso!

TEOREMA DI ROLLE

- Sia f(x) continua in un intervallo chiuso e limitato (a;b)
- Sia f(x) derivabile nell'intervallo aperto (a;b)
- Sia f(a)=f(b)

$\Longrightarrow$ $\exists$ **almeno un punto** $\mathbf{x_0} \in (\mathbf{a};\mathbf{b}) : \mathbf{f'(x_0) = 0}$



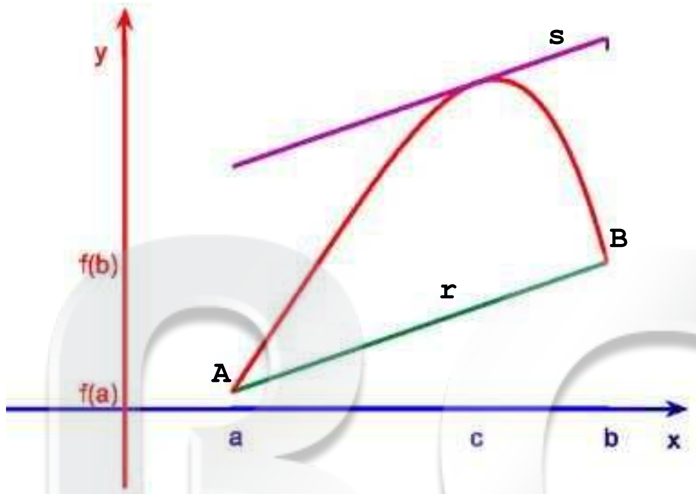
TEOREMA DI LAGRANGE O DEL VALOR MEDIO

- Sia f(x) continua in un intervallo chiuso e limitato (a;b)
- Sia f(x) derivabile nell'intervallo aperto (a;b)

$\Longrightarrow$ $\exists$ **almeno un punto c** $\in (\mathbf{a};\mathbf{b})$: $\mathbf{f'(c)} = \frac{\mathbf{f(b)-f(a)}}{\mathbf{b-a}}$

Graficamente questo vuol dire che esiste almeno un punto c, interno all'intervallo per cui il coefficiente angolare della retta congiungente gli estremi è uguale a quello della retta tangente nel punto c.

Dimostrazione:



Costruiamo la funzione ausiliaria g(x), differenza tra f(x) e l'equazione della retta AB:

$$g(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

essendo composta da funzioni continue e derivabili, anche g(x) è continua nell'intervallo $[a;b]$ e derivabile nell'intervallo (a;b) ed inoltre per costruzione abbiamo che il suo valore agli estremi è:
g(a)=g(b)=0
Osservando che la funzione g(x) verifica le ipotesi del teorema di Rolle ne deduciamo che :
esiste almeno un punto c $\in (a;b)$: g' (c) = 0

Otteniamo dunque:

$g'(c) = f'(c) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ osserviamo quindi che g'(c) = 0 (per Rolle) da cui: 0 = $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

ossia: $\mathbf{f'(c)} = \frac{\mathbf{f(b)-f(a)}}{\mathbf{b-a}}$ **c.v.d.**

FORMULA DI TAYLOR E DI MACLAURIN

Se la funzione f(x) è differenziabile n volte in x_0. Allora per x→ x_0 vale la seguente formula

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)\cdot(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}\cdot(x-x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}\cdot(x-x_0)^3 + \cdots + \frac{f^n(x_0)}{n!}\cdot(x-x_0)^n + o(x-x_0)^n$$

T_n Polinomio di Taylor

Resto di Peano

Maggiore è il grado di approssimazione più velocemente tende a zero

Se x= $x_0 + h$ allora per h→ 0 si può riscrivere la relazione nel seguente modo:

$$\mathbf{f(x)} = f(x_0+h) = f(x_0) + f'(x_0)\cdot(h) + \frac{f''(x_0)}{2!}\cdot(h)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}\cdot(h)^3 + \cdots + \frac{f^n(x_0)}{n!}\cdot(h)^n + o(h)^n$$

Quando la formula è relativa al punto $x_0 = 0$ *la formula è detta di Maclaurin*:

$$\mathbf{f(x)} = f(0) = f(x_0) + f'(o)\cdot(x) + \frac{f''(0)}{2!}\cdot(x)^2 + \frac{f'''(0)}{3!}\cdot(x)^3 + \cdots + \frac{f^n(0)}{n!}\cdot(x)^n + o(x)^n$$

Utili sviluppi di Maclaurin per alcune funzioni notevoli

$$\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1})$$

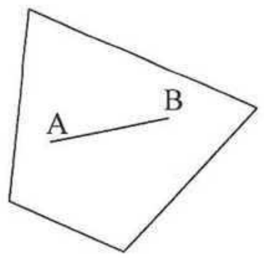
$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n})$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$$

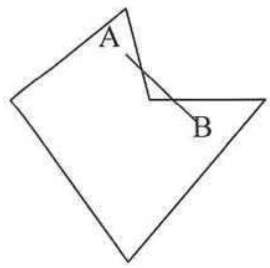
$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + o(x^n)$$

FUNZIONE CONCAVA O CONVESSA

DA RICORDARE:
Una porzione di piano si dice convessa se presi comunque due punti appartenenti alla regione il che li unisce è tutto contenuto nella regione. In caso contrario si dice concava.



convessa



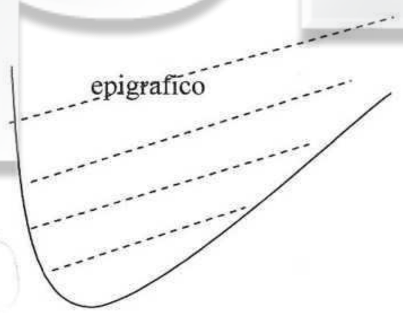
concava

Definizione:
Si dice epigrafico di una funzione f(x) l'insieme dei punti del piano che stanno al di sopra della funzione stessa.

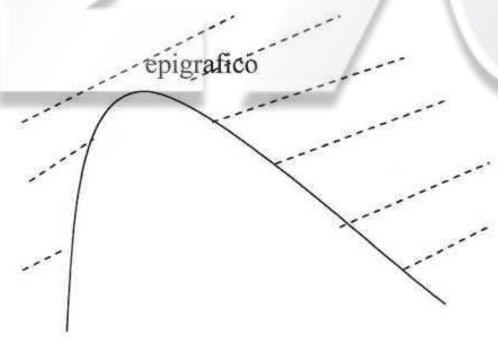
DEFINIZIONE DI FUNZIONE CONVESSA (CONCAVA) :

$\forall\, x_1, x_2 \in (a;b)\ e\ \forall t \in R\ tale\ che\ 0 \leq t \leq 1 \Longrightarrow \quad f[t \cdot x_1 + (1-t) \cdot x_2] \leq t \cdot f(x_1) + (1-t) \cdot f x_2$

Si dice invece concava se la funzione -f(x) è convessa.



strettamente convessa



strettamente concava

TEST DI CONVESSITA'

Sia la funzione f(x) due volte derivabile in un intervallo (a;b). Allora valgono le seguenti condizioni:

- f(x) convessa $\Longleftrightarrow$ f ' (x) crescente $\Longleftrightarrow$ f '' (x) ≥ 0
- f(x) concava $\Longleftrightarrow$ f ' (x) decrescente $\Longleftrightarrow$ f '' (x) ≤ 0

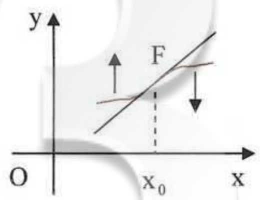
Condizione necessaria per l'esistenza di un punto di flesso (non sufficiente)

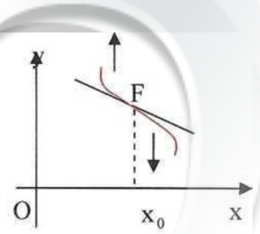
Se x_0 è un punto di flesso e ∃ f '' (x_0) $\Longrightarrow$ f ''$(x_0) = 0$

Condizioni sufficienti

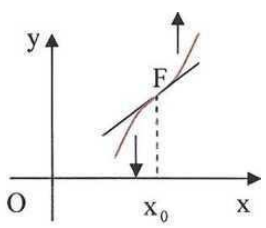
Se in x_0 ∃ f '' (x_0) e si ha che f ''$(x_0) = 0$ allora:

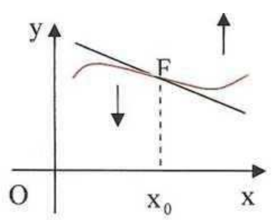
se $\begin{cases} x < x_0 & \to f''(x_0) > 0 \Longrightarrow \boxed{\text{convessa}} \\ x > x_0 & \to f''(x_0) < 0 \Longrightarrow \boxed{\text{concava}} \end{cases}$





Oppure $\begin{cases} x < x_0 & \to f''(x_0) < 0 \Longrightarrow \boxed{\text{concava}} \\ x > x_0 & \to f''(x_0) > 0 \Longrightarrow \boxed{\text{convessa}} \end{cases}$





SECONDO TEST DI RICONOSCIMENTO DEI PUNTI STAZIONARI

Risulta vantaggioso quando è difficoltoso lo studio del segno della derivata prima ed è noto x_0

Sia f(x) differenziabile n volte nel punto x_0. Se oltre alla derivata prima, il punto x_0 annulla tutte le derivate sino a quella di ordine (n-1) ma non quella di ordine n si otterrà:

$$f'(x_0) = f''(x_0) = \cdots = f^{n-1}(x_0) = 0 \qquad \wedge \qquad f^n(x_0) \neq 0$$

$$\begin{cases} \text{se n è pari} \\ se\ n\ è\ dispari\ nè\ minimo\ nè\ massimo \end{cases} \Longrightarrow \boxed{\begin{cases} f^n(x_{0)} > 0 \rightarrow\ x_0\ minimo\ locale \\ f^n(x_{0)} < 0 \rightarrow\ x_0\ massimo\ locale \end{cases}}$$

ALGEBRA LINEARE

ALGEBRA LINEARE
VETTORI

Con la seguente scrittura indichiamo un vettore a n componenti reali. $x^1 = \begin{bmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \\ \dots \\ x^n \end{bmatrix}$

Si definisce **spazio vettoriale** n-dimensionale $\boldsymbol{R^n}$ l'insieme di tutti i vettori con **n** componenti reali.

Per capire: $x^1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \end{bmatrix} \in R^2$ mentre $x^2 = \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \\ 1 \\ 2 \\ 7 \end{bmatrix} \in R^5$ e cosi via...

Se ne deduce che ciascuno spazio $\boldsymbol{R^n}$ contiene infiniti vettori a n componenti. Dunque in R^5 ci sono infiniti vettori a 5 componenti.

Chiaramente i soli vettori appartenenti a $\boldsymbol{R^1}, \boldsymbol{R^2}, \boldsymbol{R^3}$ sono rappresentabili graficamente. In particolar modo i vettori appartenenti ad $\boldsymbol{R^1}$ sono rappresentabili su una retta, quelli appartenenti ad $\boldsymbol{R^2}$ sono rappresentabili sul piano. Mentre quelli appartenenti ad $\boldsymbol{R^3}$ sono rappresentabili nello spazio a 3 dimensioni.

Vettore trasposto: dato il vettore $x^1 = \begin{bmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \\ \dots \\ x^n \end{bmatrix}$ se ne definisce vettore trasposto x^1 il vettore riga:

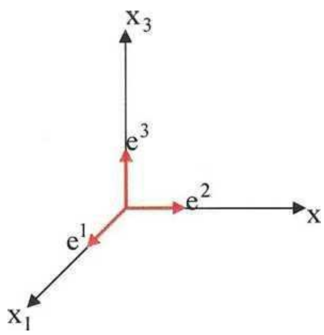
$(x^1)^T = [x^1 \quad x^2 \quad x^3 \quad \dots \quad x^n]$. Vale inoltre la relazione $((x^1)^T)^T = x^1$

Vettori fondamentali: Si definisce vettore fondamentale o standard, un vettore nello spazio R^n, che ha tutte le componenti nulle tranne la i-esima che vale 1 e vengono chiamati $e^1, e^2, \dots . e^i \; con \; i = 1,2, \dots n$.

Per esempio in R^3 i 3 vettori fondamentali sono:

$$e^1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad e^2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad e^3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

rappresentandoli graficamente otteniamo:



OPERAZIONE TRA VETTORI

1)Somma o differenza tra due vettori: Il vettore $[x+y]$, somma di x, y $\in R^n$ si ottiene sommando le componenti corrispondenti di posto uguale. N.B. Si possono sommare solo i vettori che a**ppartengono allo stesso spazio**!

Esempio: $x = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix} \in \boldsymbol{R^4}$ e y= $\begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ -1 \\ -4 \end{bmatrix} \in \boldsymbol{R^4}$ si ha che: $[x+y] = \begin{bmatrix} 9 \\ 5 \\ 0 \\ -7 \end{bmatrix} \in \boldsymbol{R^4}$

Proprietà:

-proprietà commutativa x+y = y+x con x,y $\in R^n$

-proprietà associativa x+(y+z) = (x+y) + z con x,y,z $\in R^n$

ricordatevi che il vettore nullo è un elemento neutro rispetto alla somma.

2)Prodotto scalare-vettore: Il prodotto α $\cdot x \in R^n$, di un vettore x $\in R^n$ e un numero α $\in R$, è il vettore che si ottiene moltiplicando ogni singola componente per α :

$$\alpha x = \begin{bmatrix} \alpha x_1 \\ \alpha x_2 \\ \alpha x_3 \\ \cdots \\ \alpha x_n \end{bmatrix} \in R^n$$

Proprietà:

1) α(x+y) = αx+αy con α $\in R$ e x,y $\in R^n$
2) α(βx) = αβx =β(αx) con α,β $\in R$ e x $\in R^n$
3) (-1) · x = -x
4) se αx=**0** vuol dire che α=0 o che x=**0**

3) Norma di un vettore

Si definisce norma di un vettore x $\in R^n$ il numero non negativo definito dalla seguente formula: $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$

Proprietà:

1) $\|k \cdot x\| = |k| \cdot \|x\|$ $\forall k \in R$ e $\forall x \in R^n$
2) $\|x\| = 0$ vettore nullo
3) $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$ $\forall x, y \in R^n$

4) Prodotto interno o scalare tra due vettori: il prodotto interno o scalare tra due 2 vettori x,y $\in R^n$ è un numero reale ottenuto sommando i prodotti degli elementi di posto uguale dei 2 vettori. Otteniamo dunque:

$$x^T \cdot y = \sum_{i=1}^{n}(x_i \cdot y_i) = (x_1 \cdot y_1 + x_2 \cdot y_3 + \cdots + x_n \cdot y_n)$$

Esempio: $x = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}$ e $y = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix}$

da cui otteniamo: $x^T \cdot y = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix} = (6 + 4 + 5) = 15 \in R$

Proprietà:

1) $x^T \cdot y = y^T \cdot x$
2) $x^T \cdot (y + z) = x^T \cdot y + x^T \cdot z \qquad con\, x, y, z \in R^n$
3) $x^T \cdot x = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2$

Vettori ortogonali

Si definiscono ortogonali due vettori il cui prodotto interno è il numero reale è 0

Esempio:

Trovare il valore di un parametro α tale che i due vettori dati siano ortogonali tra loro:

$x = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ e $y = \begin{bmatrix} 0 \\ 9 \\ -5 \end{bmatrix}$ da cui $x^T \cdot y = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 9 \\ -5 \end{bmatrix} = 0$

COMBINAZIONE LINEARE TRA VETTORI

Un vettore y si definisce combinazione lineare dei vettori $x^1, x^2, \dots x^k \in R^n$ se: $\boxed{y = c_1 x^2 + c_2 x^2 + \cdots + c_k x^k}$

E' importante notare che ogni vettore x ∈ R^n può essere espresso come combinazione lineare dei vettori fondamentali, assegnando le componenti del vettore x come coefficienti della combinazione lineare.

VETTORI LINEARMENTE INDIPENDENTI O DIPENDENTI

Presi $x^1, x^2, \dots x^k \in R^n$ si definiscono :

- **linearmente dipendenti** se almeno uno di essi è esprimibile come combinazione lineare degli altri

- **linearmente indipendenti** se nessuno di essi è esprimibile come combinazione degli altri

Esempio: Facciamo un esempio di vettori linearmente dipendenti dove un vettore è esprimibile come combinazione lineare degli altri:

$$x^1 = \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad x^2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 7 \\ 2 \end{bmatrix} \qquad x^3 = \begin{bmatrix} 9 \\ 5 \\ 3 \end{bmatrix} \qquad \text{dove } x^3 = x^1 + x^2$$

RICORDA: I vettori fondamentali sono sempre linearmente indipendenti tra loro.

CASI UTILI PER DETERMINARE SE K VETTORI SONO LINEARMENTE DIPENDENTI

1. Nel caso vengano dati solo 2 vettori, basta osservare se essi sono proporzionali o multipli, per verificarne la dipendenza lineare.

   esempio vettori dipendenti: $x^1 = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}$ $\quad x^2 = \begin{bmatrix} 8 \\ 2 \\ -6 \end{bmatrix}$ $\quad$ dove $x^2 = 2\,x^1$

2. Se tra i k vettori dati vi è il vettore nullo, allora questa condizione è sufficiente per affermare che i vettori sono linearmente dipendenti, poichè il vettore nullo può sempre essere scritto come combinazione lineare di qualsiasi insieme di vettori

3. Considerato che in R^n il numero massimo possibile di vettori indipendenti è n, se ne deduce che i vettori dati sono linearmente dipendenti se il numero di vettori sia maggiore di quello delle loro componenti n.

   $x^1 = \begin{bmatrix} 7 \\ 5 \\ 3 \end{bmatrix}$ $\quad x^2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ $\quad x^3 = \begin{bmatrix} 8 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix}$ $\quad x^4 = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ -3 \end{bmatrix}$

4. I vettori dati sono sempre linearmente dipendenti se tra di loro ve ne è uno proporzionale o multiplo di un altro

5. Se sono esclusi tutti i casi precendenti , si distinguono due casi:

   5.1) numero dei vettori k = n → si accostano i vettori in una matrice quadrata e se ne calcola il determinante
   - → se detA = 0 allora i k vettori sono linearmente dipendenti
   - → se detA $\neq$ 0 allora i k vettori sono linearmente indipendenti

   5.2) numero dei vettori k < n → si accostano i vettori in una matrice quadrata e se ne calcola il rango
   - → se r(A) = k allora i k vettori sono linearmente indipendenti
   - → se r(A) < k allora i k vettori sono linearmente indipendenti

MATRICI

Una matrice (di numeri reali) è una tabella di **m x n** numeri disposti su **m** righe e **n** colonne.

$$A_{m,n} = \begin{bmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & \cdots & a_{m,n} \end{bmatrix}$$

I numeri che compaiono nella tabella si dicono elementi della matrice. Un modo intuitivo per interpretare una matrice è vederla come accostamento di n vettori colonna o di m vettori riga.

MATRICE TRASPOSTA

Si dice trasposta di una matrice A e si indica con il simbolo A^T oppure A', la matrice ottenuta da A scambiando ordinatamente le righe con le colonne.

$$A_{2,3} = \begin{bmatrix} 12 & 5 & -1 \\ 4 & 7 & 2 \end{bmatrix} \qquad A^T_{3,2} = \begin{bmatrix} 12 & 4 \\ 5 & 7 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

MATRICE QUADRATA

Una matrice è detta quadrata se m=n, ossia il numero delle righe è uguale al numero delle colonne. In questo caso il numero delle righe (colonne) è detto ordine della matrice.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & -6 \\ 13 & -5 & 8 \\ 0 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

-DIAGONALE PRINCIPALE

Data una matrice quadrata di ordine n, si definisce diagonale principale di A l'insieme degli elementi di uguale indice ovvero: $a_{1,1}$, $a_{2,2}$, ... , $a_{n,n}$

MATRICE DIAGONALE

Una matrice quadrata è detta diagonale se ha tutti gli elementi nulli tranne quelli della diagonale principale:

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{è } sufficiente\ anche\ che\ non\ sia\ nullo\ un\ solo\ elemento \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

MATRICE SIMMETRICA E EMISIMETRICA

Sia A una matrice quadrata di ordine n. A è detta simmetrica se: $\mathrm{A_{i,j} = A_{j,i}\ \ per\ ogni\ i, j\ \ con\ i \neq j}$

Ossia se i suoi elementi di posto simmetrico rispetto alla diagonale principale sono uguali.

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 7 & 6 \\ 7 & 2 & -3 \\ 6 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

Sia A una matrice quadrata di ordine n. A è detta emisimmetrica se:

$A_{i,j} = -A_{j,i}\ \ per\ ogni\ i, j\ \ con\ i \neq j$

Ossia se i suoi elementi di posto simmetrico rispetto alla diagonale principale sono uguali ma di segno opposto.

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -7 & -6 \\ 7 & 2 & 3 \\ 6 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

MATRICE IDENTITA'

Una matrice quadrata avente gli elementi della diagonale principale uguali a 1 e i restanti uguali a zero è detta matrice identità.

MATRICE TRIANGOLARE INFERIORE (SUPERIORE)

Una matrice triangolare inferiore (superiore) è una matrice quadrata i cui elementi al di sopra (sotto) della diagonale principale sono tutti nulli

SOTTOMATRICE

La matrice A ottenuta sopprimendo k righe e/o h colonne di una matrice $A_{m,n}$ viene definita sottomatrice di $A_{m,n}$.

Esempio: Da $A_{3,3} = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 1 \\ -2 & 3 & 4 \\ -7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$ sopprimendo la prima riga e

la seconda colonna otteniamo: $A_{2,2} = \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ -7 & 9 \end{bmatrix}$

SOTTOMATRICE PRINCIPALE

Si definisce <u>sottomatrice principale di A</u>, una sottomatrice di A la cui diagonale principale è costituita elementi della diagonale principale di A:

Esempio:

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -7 & -6 \\ 7 & 2 & 3 \\ 6 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

Se ne ottengono le seguenti sottomatrici principali: $[5]$, $[2]$, $[1]$, $\begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 5 & 8 \\ 9 & 1 \end{bmatrix}$,

$\begin{bmatrix} 5 & -3 & 9 \\ -2 & 2 & 5 \\ 11 & -4 & 1 \end{bmatrix}$

SOTTOMATRICE DI NORD-OVEST (MOLTO IMPORTANTE)

Si definisce sottomatrice di Nord-Ovest di A di ordine K, una sottomatrice quadrata costituita dalle prime k righe e h colonne di A.

Riprendendo le sottomatrici principali trovate prima, avremo che le seguenti sarebbero sottomatrici di Nord-Ovest: $[5]$, $\begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 7 & 2 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 5 & -7 & -6 \\ 7 & 2 & 3 \\ 6 & -3 & 1 \end{bmatrix}$

OPERAZIONI TRA MATRICI

SOMMA:

Siano A e B due matrici aventi la stessa dimensione m x n. Si definisce somma delle matrici A e B, la matrice C = A + B il cui generico elemento è dato da $c_{i,j} = a_{i,j} + b_{i,j} \quad \forall\, i, \forall j$

Esempio: $[C] = [A + B]$ $\quad A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 1 \\ -2 & 3 & 4 \\ -7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 5 & -6 \\ 13 & -5 & 8 \\ 0 & 3 & 4 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 2 & 10 & -5 \\ 11 & -2 & 12 \\ -7 & 11 & 13 \end{bmatrix}$

Si tratta in pratica di sommare tra loro gli elementi di ugual posizione di riga e colonna.
Ovviamente se A e B sono m x n anche C è m x n

Proprietà:

Commutativa: A+B = B+A
Associativa: A+(B+C) = (A+B) + C
Elemento neutro rispetto alla somma: A+**0**= A **0=** matrice nulla

PRODOTTO TRA UNA MATRICE E UNO SCALARE

Dato un numero reale k (detto scalare) ed una matrice $A_{m,n}$ si definisce prodotto della matrice A per lo scalare k la matrice indicata con k·A il cui generico elemento è (k· $a_{m,n}$)

$$k \cdot A = \begin{bmatrix} ka_{1,1} & \cdots & ka_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ ka_{m,1} & \cdots & ka_{m,n} \end{bmatrix}$$

Esempio: data $A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 1 \\ -2 & 3 & 4 \\ -7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$ $\quad se\ k = 2 \quad k \cdot A = \begin{bmatrix} 2 & 10 & 2 \\ -4 & 6 & 8 \\ -14 & 16 & 18 \end{bmatrix}$

Proprietà:

- k(A + B) = k A + k B $\qquad$ k $\in R$
- (k h) A = k (h A) $\qquad$ k, h $\in R$

PRODOTTO TRA MATRICI:

Sia A una matrice m x n e B una matrice n x k, si definisce prodotto tra le matrici A e B la matrice C = A B il cui generico elemento $C_{i,j}$ è la somma dei prodotti degli elementi della i-esima riga di A per i corrispondenti elementi della j-esima colonna di B. Il Prodotto tra una matrice $A_{m,n}$ e una matrice $B_{n,k}$ è una matrice è una matrice $C_{m,n}$
Attenzione: è possibile fare il prodotto tra due matrici solo se il numero di colonne della prima matrice è uguale al numero di righe della seconda. In tal caso le due matrici si dicono conformabili per il prodotto.

Esempio:

$$A_{2,3} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \end{bmatrix} \qquad B_{3,2} = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 3 & 9 \\ -3 & -1 \end{bmatrix}$$

$$(A \cdot B)_{2,2} = \begin{bmatrix} 4 & 10 \\ 6 & -8 \end{bmatrix}$$

In sostanza si moltiplica ogni vettore riga di A per ogni vettore colonna di B:

$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ -3 \end{bmatrix}$ = (1 *4) +(-1*3) + (-1*-3) = 4

Da notare:
Per il prodotto non vale la proprietà commutativa AB ≠ BA
Se AB = BA allora le due matrici sono dette permutabili o commutabili, e se ne deduce che sia A che B sono due matrici quadrate.

Se si considera l'insieme delle matrici quadrate di ordine n, valgono le seguenti proprietà:

Proprietà associativa
A (B C) = (A B) C ∀ A , B , C

La matrice identica I di ordine è l'elemento neutro rispetto al prodotto.
Risulta, infatti:
A·I = I·A = A ∀ A dove I

Proprietà distributiva
A (B + C) = A B + A C ∀ A , B , C

Trasposta del prodotto (importante)
$(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$

CALCOLO DEL DETERMINANTE DI UNA MATRICE QUADRATA

Ad ogni matrice quadrata è possibile associare un numero reale detto determinante, indicato in generale con il simbolo |A| oppure det A, che permette di stabilire l'invertibilità o meno di una matrice. Il cui procedimento dipende dall'ordine della matrice.

1. Matrice quadrata di ordine 1: A = $[h]$ |A|= det A = k con h ∈ R

2. Matrice quadrata determinante di ordine 2:
   $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$ |A|= det A = $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} = (1 \cdot 5) - \big(1\,(-2)\big) = 7$

3. Matrice quadrata di ordine 3, si hanno due possibilità:

   -Regola di Sarrus
   Si trascrivono le prime due colonne alla destra della matrice, e si sommano i prodotti delle diagonali evidenziate in blu, a cui si sottraggono i prodotti delle diagonali evidenziate in rosso:

   Esempio:
   $$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 3 & 2 & 4 \\ 1 & -3 & 1 \end{bmatrix} \qquad \det A = \left|\begin{array}{ccc|cc} 2 & -1 & -2 & 2 & -1 \\ 3 & 2 & 4 & 3 & 2 \\ 1 & -3 & 1 & 1 & -3 \end{array}\right|$$
   det A= 2*2*1 + (-1)*4*1 + (-2)*3*(-3) - (-2)*2*1 - 2*4*(-3) - (-1)*3*1 = 49

   -Metodo di Laplace (consigliato)

4. Matrice di ordine 4: Metodo di Laplace
   (Prima di spiegare il metodo di Laplace sarà necessario introdurre il concetto di complemento algebrico)

Proprietà:

1. Se in una matrice è presente una riga o colonna con tutti gli elementi uguali a 0 il determinante è nullo

2. Se in una matrice vi sono due colonne o righe proporzionali o uguali il determinante è nullo

3. I determinanti di una matrice A e della sua trasposta A^T sono uguali.

4. Vale la seguente relazione: $\det(k \cdot A) = K^n \cdot \det A$

5. Se in una matrice uno dei vettori colonna o riga, è combinazione lineare degli altri, il determinante è nullo.

MINORE COMPLEMENTARE

Si definisce minore complementare di un elemento $a_{i,j}$ appartenente alla matrice A, il determinante della sottomatrice che si ottiene sopprimendo la i-esima riga e la j-esima colonna, al cui incrocio si trova $a_{i,j}$ e si indica con $M_{i,j}$

Esempio: $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 3 & 2 & 4 \\ 1 & -3 & 1 \end{bmatrix}$ minore di complementare di -1 $= M_{1,2} = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1$

COMPLEMENTO ALGEBRICO DI UN ELEMENTO

Si definisce complemento algebrico di un elemento il prodotto : $(-1)^{i+j} \cdot M_{i,j}$

In sostanza il complemento algebrico è il minore complementare o il suo opposto, a seconda che la somma i+j sia pari o dispari.

PRIMO TEOREMA DI LAPLACE

Il determinante di una matrice quadrata A è pari alla somma dei prodotti degli elementi di una riga o colonna qualsiasi per i rispettivi complementi algebrici.

Data $A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{bmatrix}$ si scelga ad esempio la seconda colonna

det A = - $a_{1,2} \cdot \begin{vmatrix} a_{2,1} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,3} \end{vmatrix} + a_{2,2} \cdot \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,3} \\ a_{3,1} & a_{3,3} \end{vmatrix}$ - $a_{3,2} \cdot \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,3} \end{vmatrix}$

si procederà poi con il calcolo del determinante delle matrici 2 x 2 individuate, secondo il metodo illustrato in precedenza.

SECONDO TEOREMA DI LAPLACE

In ogni matrice quadrata A la somma dei prodotti degli elementi di una colonna o di una riga per i complementi algebrici degli elementi corrispondenti di un'altra colonna o riga è nulla

MATRICE INVERSA

Si definisce matrice inversa di A o più semplicemente inversa di A e si indica con il simbolo A^{-1} la matrice quadrata (se esiste) di ordine n tale che : **A**$\cdot \boldsymbol{A^{-1}}$ **=** $\boldsymbol{A^{-1}}$ $\cdot$ **A = I**
I chiaramente è la matrice identità

Se una matrice A ha inversa allora A è detta invertibile o non singolare, e A^{-1} è unica.

Condizione necessaria e sufficiente per l'esistenza della matrice inversa:
Una data matrice quadrata di ordine n, ammette la sua inversa A^{-1} se e solo se il il determinante di A è diverso da zero: $\exists \boldsymbol{A^{-1}} \leftrightarrow \mathbf{det}\, \boldsymbol{A} \neq \mathbf{0}$

Se è valida tale condizione abbiamo che:

$$\boxed{\boldsymbol{A^{-1}} = \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{det\ A}} \cdot \boldsymbol{A^{*}}}$$

$\boldsymbol{A^{*}}$ è la matrice aggiunta, ossia la matrice formata dai complementi algebrici di ogni elemento della matrice trasposta.

Esempio:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

Verifichiamo come prima cosa che detA $\neq 0$
Otterremo che detA= -5 quindi ne deduciamo che esiste l'inversa di A
Calcoliamo dunque la trasposta della matrice di partenza:

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

E calcoliamo per ogni elemento del determinante della matrice trasposta il complemento algebrico:

$C_{1,1} = 5$ $C_{1,2} = -5$ $C_{1,3} = 0$
$C_{2,1} = 0$ $C_{2,2} = -1$ $C_{2,3} = 2$
$C_{3,1} = -5$ $C_{3,2} = 3$ $C_{3,3} = -1$
Consideriamo quindi la matrice $\mathbf{A}^{*}$ che ha come elementi i complementi algebrici trovati:

$$\mathbf{A}^{*} = \begin{bmatrix} \mathbf{5} & \mathbf{-5} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{-1} & \mathbf{2} \\ \mathbf{-5} & \mathbf{3} & \mathbf{-1} \end{bmatrix}$$

Dividiamo quindi la matrice $\mathbf{A}^*$ per il valore del determinante di A (il cui valore era -5) e ottengo la matrice inversa A^{-1}

$$A^{-1} = -\frac{1}{5}\begin{bmatrix} 5 & -5 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ -5 & 3 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1/5 & -2/5 \\ 1 & -3/5 & 1/5 \end{bmatrix}$$

Calcolo determinanti

- $\det \mathrm{A} = \det \boldsymbol{A}^{\boldsymbol{T}}$
- $\det(\mathrm{A} \cdot \boldsymbol{B}) = \det\mathrm{A} \cdot \det\mathrm{B}$
- $\det \boldsymbol{A}^{-1} = \frac{\mathbf{1}}{\det \boldsymbol{A}}$
- $\det \boldsymbol{A}^{\boldsymbol{n}} = \boldsymbol{det}^{\boldsymbol{n}}\mathrm{A}$
- $\det(\mathrm{k} \cdot \boldsymbol{A}) = \boldsymbol{k}^{\boldsymbol{n}} \cdot \boldsymbol{detA}$

Proprietà matrici inverse

1. **A · C = B · C → A=B**
2. $(\mathrm{A}^{-1})^{-1}$ **= A**
3. **(A · B)$^{-1}$ = $\boldsymbol{A}^{-1} \cdot \boldsymbol{B}^{-1}$**
4. $\boldsymbol{A}^{\boldsymbol{m}} \cdot \boldsymbol{A}^{\boldsymbol{n}} = \boldsymbol{A}^{\boldsymbol{m+n}}$
5. $(\mathbf{A}^{-1})^{\mathbf{T}} = (\mathbf{A}^{\mathbf{T}})^{-1}$
6. **Se A è simmetrica lo è anche la sua inversa**
7. **Se A · B = 0 ↔ B=0**
8. **La diagonale della matrice inversa di A è formata dai reciproci degli elementi della diagonale principale di A**

RANGO DI UNA MATRICE

Definizione: Il rango di una matrice A è il massimo ordine per il quale si può trovare una sottomatrice quadrata con determinante non nullo.

Esempio: Data la matrice $A_{3,4} = \begin{bmatrix} 4 & 6 & 2 & -2 \\ 0 & 4 & 10 & 2 \\ -2 & 0 & 4 & -6 \end{bmatrix}$ il rango r(A) è un numero intero tale che: $1 \leq r(A) \leq 3$

Le sottomatrici di ordine 3 della matrice A sono 4, precisamente:

$$\begin{bmatrix} 4 & 6 & 2 \\ 0 & 4 & 10 \\ -2 & 0 & 4 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 4 & 6 & -2 \\ 0 & 4 & 2 \\ -2 & 0 & -6 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 4 & 2 & -2 \\ 0 & 10 & 2 \\ -2 & 4 & -6 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 6 & 2 & -2 \\ 4 & 10 & 2 \\ 0 & 4 & -6 \end{bmatrix}$$

1° caso) se uno almeno dei determinanti delle sottomatrici è diverso da 0 → r(A)=3

2° caso) se tutti i determinanti delle sottomatrici sono nulli $1 \leq r(A) \leq 3$. Per sapere se il rango è 1 oppure 2 bisognerebbe scrivere tutte le sottomatrici di ordine 2 e calcolarne il determinante per trovare quella sottomatrice il cui determinante è non nullo.
Se uno almeno dei determinanti delle sottomatrici di ordine 2 è diverso da 0 → r(A)=2 in caso contrario è 1.

Osservazione: il rango è uguale a 0 se A è la matrice nulla.

Altra definizione: Il rango di una matrice A è il massimo numero di colonne (o righe) linearmente indipendenti in A

CALCOLO DEL RANGO (algoritmo di Kronecker)

Data la matrice: $A_{3,4} = \begin{bmatrix} 4 & 6 & 2 & -2 \\ 0 & 4 & 10 & 2 \\ -2 & 0 & 4 & -6 \end{bmatrix}$ trattata in precedenza, il rango è un numero tale che: $1 \leq r(A) \leq 3$

Prendendo la prima sottomatrice quadrata di ordine due ci accorgiamo che il determinante è diverso da zero, infatti:

$$\begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = 16 \neq 0 \quad \rightarrow \quad 2 \leq r(A) \leq 3 \qquad (il\ rango\ è\ almeno\ 2)$$

Ora, orlando questa sottomatrice prima con la terza riga e la terza colonna poi con la terza riga e la quarta colonna si ottengono due sottomatrici quadrate di ordine 3, se almeno uno dei determinanti di queste due sottomatrici è diverso da zero il rango è 3 altrimenti è 2:

$$\begin{vmatrix} 4 & 6 & 2 \\ 0 & 4 & 10 \\ -2 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 64 - 120 + 16 = -40 \neq 0 \rightarrow \quad r(A) = 3$$

Osservazione: Nel caso in cui non ci fossero stati determinanti non nulli delle sottomatrici di ordine 2 il rango sarebbe stato 1.

Teorema di Kronecker:

In una matrice A, considerato un minore di ordine p con determinante diverso da zero, si definiscono orlati tutti i minori di ordine p + 1, ottenuti aggiungendo una riga e una colonna di A. Se tutti gli orlati hanno determinante nullo, allora r(A) = p.

Calcolo del rango: i vari casi

Matrici quadrate:

Ordine 2: $A = \begin{bmatrix} 7 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow \ 1 \leq r(A) \leq 2$ si calcola il determinante

se il determinante è non nullo r(A)=2 se il determinante è nullo r(A)=1

nell'esempio $detA = 10 \neq 0 \rightarrow \ r(A) = 2$

Ordine 3: $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 9 & 1 & 2 \\ 5 & 3 & 6 \end{bmatrix} \rightarrow \ 1 \leq r(A) \leq 3$ si calcola il determinante

in questo caso detA=0 quindi il rango <u>non</u> può essere 3. Prendiamo allora il minore di nord-ovest

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 9 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \rightarrow \ r(A) = 2$$

Essendo il determinante non nullo il rango è 2.

Ordine 4 o superiore:

proprio come per le matrici di ordine 2 e di ordine 3 si calcola il determinante, se è diverso da 0 il rango è equivalente all'ordine massimo della matrice mentre se è uguale a 0 si applica Kronecker.

Matrici rettangolari:

Matrici (2,h) o (h,2):

$A_{2,5} = \begin{bmatrix} 4 & 6 & 2 & 8 & -8 \\ 0 & 4 & 12 & -2 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow \ 1 \leq r(A) \leq 2$ Per matrici del genere applichiamo la seconda definizione di rango: esso coincide con il numero di vettori riga (colonna) indipendenti. In questo caso il rango è 2 infatti i due vettori riga sono indipendenti tra loro.

$A_{4,2} = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 0 \\ -3 & 9 \\ 2 & -6 \end{bmatrix} \rightarrow \ 1 \leq r(A) \leq 2$ In questo caso i vettori colonna sono dipendenti tra loro, di conseguenza il rango è 1.

Matrici (3,4) o (4,3):

si usa Kronecker come già visto in precedenza.

CALCOLO DEL RANGO AL VARIARE DI UN PARAMETRO

Data $A = \begin{bmatrix} 2k & 1 & 3 \\ 2 & 0 & -2 \\ 2 & k & (k+2) \end{bmatrix}$ si calcola il determinante della matrice.

Per Laplace (rispetto alla seconda riga) $detA = -2(k+2-3k) + 2(2k^2-2) = 4k^2+4k-8$

quindi detA=0 se $4k^2+4k-8=0 \rightarrow \ k_1 = 1 \cap k_2 = -2$

quindi se:

· $\boldsymbol{k \neq -2 \cap k \neq 1} \rightarrow detA \neq 0 \rightarrow r(A) = 3$

· $\boldsymbol{k = -2} \ \rightarrow A = \begin{bmatrix} -4 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & -2 \\ 2 & -2 & 0 \end{bmatrix} = -4-12+16 = 0$ si prende il minore di NW di ordine 2:

$\begin{vmatrix} -4 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \rightarrow \ r(A) = 2$

· $\boldsymbol{k = 1} \rightarrow \ A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} = -4+6+4-6 = 0$ si prende il minore di NW di ordine 2:

$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \rightarrow \ r(A) = 2$

SOTTOSPAZI

Un sottoinsieme $S \subseteq \mathrm{R}^n$ è un sottospazio di R^n se:

$$\boldsymbol{\alpha x^1 + \beta x^2 \in R^n} \qquad \forall \alpha, \beta \in R \quad e \quad \forall x^1, x^2 \in R^n$$

Ossia: S è un sottospazio di R^n se è chiuso rispetto alle operazioni di somma e prodotto per scalari definite in R^n.
N.B.: il vettore nullo appartiene a qualsiasi sottospazio di R^n ma se un sottoinsieme di R^n contiene il vettore nullo non significa che sia un sottospazio di R^n.

Siano $v^1, v^2, \ldots., v^n \in R^n$ vettori di S, le infinite combinazioni lineari di tali n vettori generano sempre un sottospazio di R^n, si scrive $S = L(v^1, v^2, \ldots., v^n)$ e i vettori $v^1, v^2, \ldots., v^n$ sono detti **generatori** del sottospazio S.
Il numero massimo di vettori linearmente indipendenti tra i vettori generatori del sottospazio definiscono la **dimensione** del sottospazio, essa, dalla seconda definizione di rango di una matrice, è uguale al rango della matrice A ottenuta accostando i vettori generatori di S.

$$\mathbf{dim}\, \boldsymbol{S} = \boldsymbol{r}(\boldsymbol{A})$$

Esempio: $S = L = \left(\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \\ 10 \end{bmatrix} \right)$ è l'insieme delle combinazioni lineari $v^1\ e\ v^2$ e $\alpha v^1 + \beta v^2$ sono linearmente indipendente e **generatori** del sottospazio S.
La dimensione di S è 2 ed è uguale al rango della matrice ottenuta accostando $v^1\ e\ v^2$.
Definizione: una **base** di S, dove la dimensione di S è k, è un insieme qualsiasi di k vettori linearmente indipendenti nel sottoinsieme stesso, ciò significa che S ha basi possibili infinite.

Osservazione: quando dim S = k = n i k vettori generano tutto lo spazio R^n.
Ad esempio gli n versori fondamentali, essendo linearmente indipendenti tra loro, generano tutto lo spazio R^n e ne formano la base canonica.

Un sottospazio può essere scritto nella forma

$S = \left\{ \begin{bmatrix} 4t + 7s \\ 2t \\ 6s \end{bmatrix} \right\}$ che equivale a: $t \cdot \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} + s \cdot \begin{bmatrix} 7 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix}$

Ricordando però che non è un sottospazio qualora:
- tra le componenti ci sia un numero diverso da 0
- un'incognita sia elevata ad un numero diverso da 1
- ci sia una somma tra incognita e numero

SISTEMI LINEARI

Un sistema di equazioni lineari è un insieme di *m* equazioni lineari in *n* incognite

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,n}x_n = b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m,1}x_1 + a_{m,2}x_2 + \cdots + a_{m,n}x_n = b_m \end{cases}$$

<u>Esempio:</u> $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \\ 2x_1 - 3x_2 + 5x_3 = 1 \\ 4x_1 - 4x_2 - 3x_3 = 0 \end{cases} \qquad m = 3,\ n = 3$

Si indicano con A la matrice dei coefficienti, con <u>x</u> il vettore delle incognite e con <u>b</u> il vettore dei termini noti:

$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 2 & -3 & 5 \\ 4 & -4 & -3 \end{bmatrix} \qquad \underline{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \underline{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$

Che scritto in forma matriciale:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 2 & -3 & 5 \\ 4 & -4 & -3 \end{bmatrix}}_{A} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}}_{\underline{x}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\underline{b}}$$

Da ciò l'equazione **A · x = b**

- Se <u>b</u> ≠ <u>0</u> il sistema è detto <u>non omogeneo</u>
- Se <u>b</u> = <u>0</u> il sistema è detto <u>omogeneo</u>

TEOREMA DI ROUCHE'- CAPELLI

Enunciato: un sistema lineare del tipo Ax=b ammette una o infinite soluzioni solo se il rango della matrice dei coefficienti è uguale al rango della matrice dei coefficienti orlata del vettore dei termini noti:

$$r(A) = r(A|b)$$

$$A_{m,n} = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & \cdots & a_{2,n} \\ \cdots & \cdots & \ldots & \ldots & \cdots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m,1} & a_{m,1} & \ldots & \ldots & a_{m,n} \end{bmatrix} = (A_{m,n}|b) = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} & b_1 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} & b_2 \\ \cdots & \cdots & \ldots & \cdots & \cdots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m,1} & a_{m,1} & \ldots & a_{m,n} & b_m \end{bmatrix}$$

Dimostrazione:

Condizione necessaria: partendo dall'ipotesi che un sistema del tipo Ax=b sia possibile vogliamo dimostrare che r(A)=r(A|b). Scriviamo quindi la matrice A come accostamento dei vettori colonna e il vettore x

$$[a^1 \quad a^2 \quad \ldots \quad a^n]\,; \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix};$$

possiamo quindi scrivere: $b = x_1a^1 + x_2a^2 + .. + x_na^n$

b è quindi una combinazione lineare delle colonne di A e può essere tale se e solo se gli insiemi $\{a^1 \quad a^2 \quad \ldots \quad a^n\}$ e $\{a^1 \quad a^2 \quad \ldots \quad a^n \quad b\}$ hanno lo stesso numero di vettori linearmente indipendenti e ciò vale a dire che r(A)=r(A|b)

Condizione sufficiente: partendo dall'ipotesi che r(A)=r(A|b) si vuole dimostrare che un sistema del tipo Ax=b sia possibile. Dato che per ipotesi r(A)=r(A|b) b è combinazione lineare delle colonne di A. E' quindi possibile scrivere $b = x_1a^1 + x_2a^2 + .. + x_na^n$

Ciò vuole dire che esiste un vettore x $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ tale che Ax=b

SISTEMA LINEARE NON OMOGENEO

Come abbiamo già visto in un sistema Ax=b quando b è diverso dal vettore nullo il sistema è detto non omogeneo.

$$Ax = b \quad con \;\; b \neq \mathbf{0}$$

Come già detto dal teorema di Rouchè-Capelli se $r(A) \neq r(A|b)$ il sistema non ammette soluzioni. Se invece $r(A) = r(A|b)$ si presentano due possibili alternative

- Se $r(A) = r(A|b) = n$ il sistema ammette una sola soluzione
- Se $r(A) = r(A|b) < n$ il sistema ammette ∞^{n-r} soluzioni, dove (n-r) sono i gradi di libertà

<u>Esempio:</u> caso $r(A) = r(A|b) = n \rightarrow ammette\ una\ soluzione \quad \boldsymbol{m = n}$

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \\ 2x_1 - 3x_2 + 5x_3 = 1 \\ 4x_1 - 4x_2 - 3x_3 = 0 \end{cases} \qquad \text{m=n} \qquad \underline{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \underline{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 2 & -3 & 5 \\ 4 & -4 & -3 \end{bmatrix} \qquad (A|b) = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & -3 & 5 & 1 \\ 4 & -4 & -3 & 0 \end{bmatrix}$$

Calcoliamo il rango → $\det A = 135 \neq 0 \;\rightarrow\; r(A) = 3$ dunque anche il rango di (A|b) è uguale a 3 essendo il rango uguale al numero n di incognite il sistema ammette una sola soluzione per trovare il vettore <u>x</u> si possono utilizzare due metodi:

1] Regola di Cramer

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{\det A_{x_1}}{\det A} = \dfrac{\begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & -3 & 5 \\ 0 & -4 & -3 \end{bmatrix}}{3} = \dfrac{2}{3} \\ x_2 = \dfrac{\det A_{x_2}}{\det A} = \dfrac{\begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 5 \\ 4 & 0 & -3 \end{bmatrix}}{3} = -\dfrac{5}{3} \\ x_3 = \dfrac{\det A_{x_3}}{\det A} = \dfrac{\begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & -3 & 1 \\ 4 & -4 & 0 \end{bmatrix}}{3} = \dfrac{20}{3} \end{cases} \rightarrow \qquad \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ -\frac{5}{3} \\ \frac{20}{3} \end{bmatrix}$$

2] Teorema di Cramer: metodo della matrice inversa

Qualora la matrice A sia quadrata di ordine n, con determinante non nullo e che ammetta una sola soluzione <u>x</u> questa soluzione si ottiene moltiplicando l'inversa di A per il vettore dei termini noti:

$$x = A^{-1} \cdot b$$

Essendo il determinante di A diverso da 0 la matrice inversa esiste.

TEOREMA DI CRAMER

Presa in considerazione una matrice A, quadrata di ordine n,con il $detA \neq 0$ il sistema lineare Ax = b ammette esattamente una soluzione : $\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$

Dimostrazione:

Poiché il $detA \neq 0$, la matrice A è invertibile ovvero esiste la matrice inversa A^{-1}

Dato $Ax = b$ moltiplicando entrambi i membri per A^{-1}

$A^{-1}(Ax) = A^{-1}b$ e applicando la proprietà associativa

$(A^{-1}A)x = A^{-1}b$ essendo $I_n = (A^{-1}A)$ e $I_n x = x$

Si ottiene

$x = A^{-1}b$ c.v.d

REGOLA DI CRAMER

Se A è una matrice quadrata di ordine n con il $detA \neq 0$, senza calcolare A^{-1} ma prendendo in considerazione il calcolo dei determinanti, sappiamo che il sistema lineare $Ax = b$ ammette una soluzione x o y del tipo:

$$x_{i=}\frac{\det A_{ix}}{\det A} \qquad y_i = \frac{\det A_{iy}}{\det A} \qquad con\ i = 1,2 \dots n$$

Nota bene A_i è la matrice che si ottiene sostituendo alla i-esima colonna la colonna dei termini noti b.

Esempio $\begin{cases} 2x + 3y = 12 \\ 3x - y = 7 \end{cases}$ $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 7 \end{bmatrix}$

In entrambe le soluzioni considerero' il determinante (ho preso le prime due colonne)

$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$ = 2·(-1) - 3·3 = -2 - 9 = -11

Per trovare la x devo prendere il determinante considerato, cancellare la colonna delle x e al suo posto mettere i termini noti

$\begin{bmatrix} 12 & 3 \\ 7 & -1 \end{bmatrix} = 12(-1) - 3 \cdot 7 = -33$

Per calcolare il valore della x devo scrivere al denominatore il determinante ottenuto dalle prime due colonne ed al numeratore cancello la colonna delle x ed al suo posto metto i termini noti

$$x = \frac{\begin{bmatrix} 12 & 3 \\ 7 & -1 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}} = \frac{-33}{-11} = 3$$

Per calcolare la y metto al denominatore le prime due colonne mentre al numeratore cancello la colonna delle y e ci metto i termini noti

$$y = \frac{\begin{bmatrix} 2 & 12 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}} = \frac{-22}{-11} = 2$$

Quindi ottengo : $x = 3$ $y = 2$

1)<u>Caso infinite soluzioni e $m = n$</u>

$$\begin{cases} 2x + 4y - 6z = 2 \\ 4x - 2y - 2z = o \\ 6x + 2y - 8z = 2 \end{cases} \rightarrow \quad m = n \quad x = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -6 \\ 4 & -2 & -2 \\ 6 & 2 & -8 \end{bmatrix} \qquad [A|b] = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -6 & 2 \\ 4 & -2 & -2 & 0 \\ 6 & 2 & -8 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\det A = 0 \qquad [A|b]_1 = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 4 & -2 & 0 \\ 6 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

$$A_1 = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = -4 - 16 = -20 \neq 0 \rightarrow r(A) = 2 \qquad r(A|b) = 2$$

$$r(A) = r(A|b) = 2 < n = 3 \ \ dunque\ avremo\ \infty^1\ soluzioni$$

Esempio con z caso particolare:

$$\begin{cases} 2x + 4y = 6z + 2 \\ 4x - 2y = 2z \\ Z = Z \end{cases}$$

Per individuare le infinite soluzioni,scaturite dal variare del parametro z applico la regola di Cramer

$$\begin{cases} x = \dfrac{detA_{1x}}{detA_1} = \dfrac{\begin{vmatrix} (6x+2) & 4 \\ z & -2 \end{vmatrix}}{-20} = \dfrac{-12z - 4 - 4z}{-20} = \dfrac{16z + 4}{20} \\ y = \dfrac{detA_{1y}}{detA_1} = \dfrac{\begin{vmatrix} 2 & (6x+2) \\ 4 & z \end{vmatrix}}{-20} = \dfrac{2z - 24z - 8}{-20} = \dfrac{22z + 8}{20} \end{cases} \rightarrow \quad X = \begin{bmatrix} \dfrac{16z+4}{20} \\ \dfrac{22z+8}{20} \\ z \end{bmatrix}$$

2)<u>Caso infinite soluzioni e $m \neq n$</u>

$$\begin{cases} 4x - 2y + 6z = 2 \\ 2x + 10y - 2z = 4 \end{cases} \rightarrow m \neq n \qquad b = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} \qquad x = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 6 \\ 2 & 10 & -2 \end{bmatrix} \qquad\qquad [A|b] = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 6 & 2 \\ 2 & 10 & -2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$|A_1| = \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 2 & 10 \end{vmatrix} = 44 \neq 0 \rightarrow r(A) = 2 \qquad r(A|b) = 2 \; ovviamente \; non \; potendo \; essere \; 3$$

$$r(A) = r(A|b) = 2 < n = 3 \rightarrow \; \infty^1 \; soluzioni \; tutte \; dispendenti \; da \; un \; solo \; parametro$$

Spostando z il sistema diventa:

$$\begin{cases} 4x - 2y = 2 - 6z \\ 2x + 10y = 4 + 2z \\ z = z \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \dfrac{\begin{bmatrix} (2-6z) & -2 \\ (4+2z) & 10 \end{bmatrix}}{44} = \dfrac{20 - 60z + 8 + 4z}{44} = \dfrac{28 - 54z}{44} \\ y = \dfrac{\begin{bmatrix} 4 & (2-6z) \\ 2 & (4+2z) \end{bmatrix}}{44} = \dfrac{16 + 8z - 4 + 12z}{44} = \dfrac{12 + 20z}{44} \end{cases} \rightarrow \quad x = \begin{bmatrix} \dfrac{28 - 54z}{44} \\ \dfrac{12 + 20z}{44} \\ z \end{bmatrix}$$

3)Una soluzione con $m \neq n$

$$\begin{cases} 2x + y = -1 \\ -x - y = 1 \\ x + 2y = -3 \end{cases} \qquad m = 3 \neq n = 2 \quad b = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix} \quad x = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \qquad [A|b] = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \end{bmatrix}$$

$$|A_1| = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \rightarrow r(A) = 2 \quad \det[A|b] = 0 \rightarrow r(A|b) = 2$$

$$r(A) = r(A|b) = n = 2 \rightarrow una \; soluzione$$

Poichè $m \neq n$ il sistema cambia, essendo la terza equazione superflua scriviamo:

$$\begin{cases} 2x + y = -1 \\ -x - y = 1 \end{cases}$$ da cui applicando la regola di Cramer

$$\begin{cases} x = \dfrac{detA_{1x}}{detA_1} = \dfrac{\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}}{-1} = 0 \\ y = \dfrac{detA_{1y}}{detA_1} = \dfrac{\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}}{-1} = -1 \end{cases} \rightarrow X = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

SISTEMA OMOGENEO

Dato b=vettore nullo (b=0) $\longrightarrow$ Ax=b $\longrightarrow$ Ax=0

Schema Risolutivo:

Calcolare il rango della matrice A r(A)

SE r(A)= n(num. incognite)

Il Sistema ammette un'unica soluzione nulla x=0 (soluzione banale)

SE r(A)< n(num. incognite)

Il Sistema ammette ∞^{n-r} soluzioni, dove (n-r) sono i gradi di libertà

NOTA BENE : in un sistema lineare omogeneo, dato che b(vettore nullo) è combinazione lineare delle colonne di A, ed essendo r(A) = r(A|b) si avrà che esso è sempre possibile .

Esempio 1, soluzione banale x=0

$$\begin{cases} x+y-z=0 \\ 3x-3y+z=0 \\ -5x+y+z=0 \end{cases} \qquad b=\begin{matrix}0\\0\\0\end{matrix} \qquad x=\begin{matrix}x\\y\\z\end{matrix} \qquad A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 3 & -3 & 1 \\ -5 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Det(A) = -1≠0 $\Longrightarrow$ r(A)=3= numero di incognite $\longrightarrow$ il sistema ammette solo la soluzione banale

:x= $\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$

ESEMPIO 2, Il Sistema ammette ∞^{n-r} soluzioni

$\begin{cases} x+w=0 \\ x+2w-3z=0 \end{cases}$ m(numero di colonne) =2 ≠n (numero di incognite) =3 quindi:

b=$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ e x =$\begin{bmatrix} x \\ w \\ z \end{bmatrix}$; il r(A) = r(A_1) - sottomatrice quadrata -

A=$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -3 \end{bmatrix}$ A_1=$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ il cui determinante è = 1≠ 0 $\longrightarrow$ r(A)=2

abbiamo che $\longrightarrow$ $\boxed{\textbf{r(A)=2 < n= 3, il sistema ammette } \infty^{3-2} \textbf{ soluzioni}}$

a questo punto possiamo risolvere il sistema secondo il metodo di Cramer:

Il sistema diventa

$$\begin{cases} x+w=0 \\ x+2w=3z \\ z=z \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{\det A1x}{\det A\,1} = \dfrac{\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 3z & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}} = \dfrac{-3z}{1} \\ w = \dfrac{\det A1w}{\det A\,1} = \dfrac{\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 3z \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}} = \dfrac{3z}{1} \\ z = z \end{cases}$$

x=$\begin{bmatrix} -3z \\ 3z \\ z \end{bmatrix}$= z·$\begin{bmatrix} -3 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$

NOTA BENE : si dice Nucleo il sottospazio di ordine R^n che è costituito dalle soluzioni di un sistema omogeneo. (Nell'esempio precedente il nucleo ha dimensione N=1

SISTEMI PARAMETRICI

Esempio:

dato il sistema: $\begin{cases} x+y-z=1 \\ 2x+3y+kz=3 \\ x+ky+3z=2 \end{cases}$

passo 1 : costruisco la matrice incompleta

$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & k \\ 1 & k & 3 \end{vmatrix}$= il determinante è -$k^2$+k+6;

passo 2: risolvo la disequazione e trovo i valori di k per cui il determinante è ≠0

det≠ 0 per k≠2 e k ≠ -3; per k≠ da 2, -3 il sistema è crameriano è ammette un'unica soluzione

passo 3: studiare i casi **k=2, k=-3**

soluzioni per k=2 Si ha che il determinante di $\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$= 0 e quindi il rango della matrice incompleta è <di 3 (=2) ; controllando il rango della completa =$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \end{vmatrix}$ scopriamo che nessun minore ha determinante ≠ 0 ; anche il rango della completa è <3 (=2) e quindi secondo il teorema di Rouché-Capelli il sistema è possibile e ammette $\infty^{n-r} = \infty^{3-2} = \infty^{1}$

soluzioni per k=3 Si ha che il determinante della incompleta è $\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & 3 \end{vmatrix}$= 0; analizzando i minori estraibili dalla completa troviamo che $\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & 3 & 2 \end{vmatrix}$ il determinante di $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix}$≠ 0 = 5 e quindi il sistema risulta **impossibile**

Caso Particolare:

dato la matrice quadrata $\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ trovare i valori di k per cui il sistema :

Ax=kx ammette **infinite soluzioni**

Ax-kx= 0 $\longrightarrow$ e ricordando che I·x= x dove I è la matrice Identità,

si ha che Ax-k·I·x = 0 e raccogliendo $\longrightarrow$ (A-k·I)·x = 0

$$\left(\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix}\right) \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \text{ che diventa } \begin{pmatrix} (3-k) & 5 \\ 0 & (2-k) \end{pmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Sappiamo che il sistema omogeneo ottenuto nell'ultimo passaggio ha infinite soluzioni se **r(A-Ik)<n;** questo avviene quando il determinante della matrice **A-Ik** è =0 , ossia quando **k=2 o k=3**

NOTA: per gli altri valori di k ammetterebbe solo la soluzione nulla x=$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

FUNZIONI LINEARI

Data:

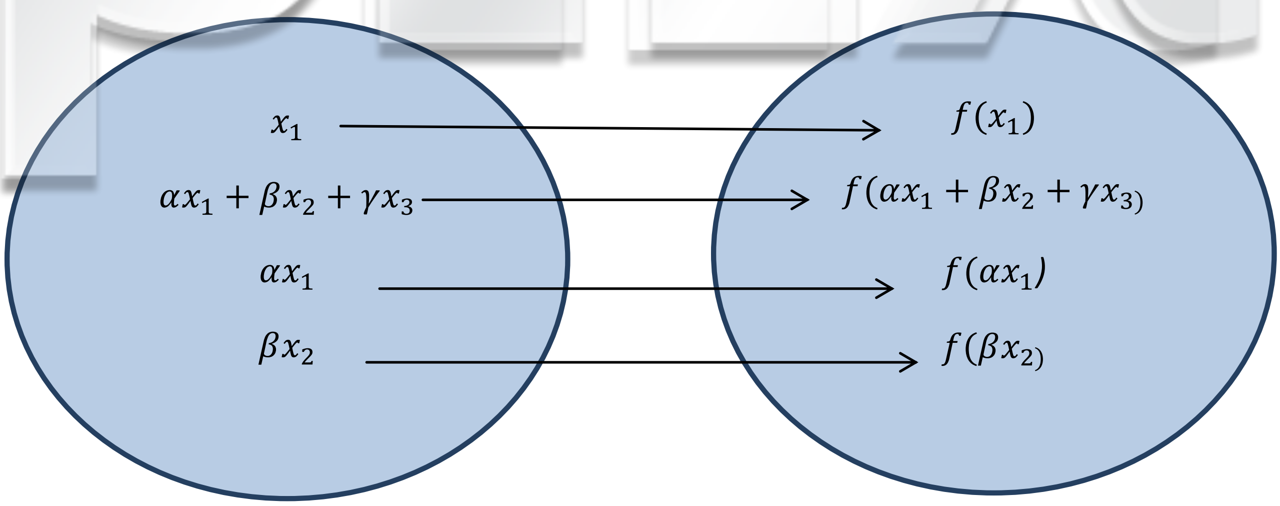
1) **La Proprietà additiva, per cui :** $\boldsymbol{f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2)}$
2) **La Propietà omogenea di primo grado per cui :** $\boldsymbol{f(\alpha x) = \alpha f(x)}$

Una funzione vettoriale $f: R^n \to R^m$ è lineare se : $\forall\, \boldsymbol{x_1, x_2} \in R^n, e\, \forall\, \alpha, \beta \in \boldsymbol{R}$:

$$\boldsymbol{f(\alpha x_1 + \beta x_2) = \alpha f(x_1) + \beta f(x_2)}$$

Esempi di funzioni lineari:

- $\boldsymbol{f}: R \to R$ se la funzione lineare ha forma $f(x) = kx$
- $\boldsymbol{f}: R^2 \to R$ se la funzione lineare ha forma $f(x, y) = 4x - 3y$
- … … ….
- $\boldsymbol{f}: R^n \to R$ se la funzione lineare ha forma $f(x_1, x_2, x_3 \ldots x_n) = \alpha x_1 + \beta x_2 + \gamma x_3 \ldots . + \vartheta x_n$



TEOREMA DI RAPPRESENTAZIONE

Sia $f: R^n \rightarrow R^m$ una funzione. Allora f è lineare se e solo se esiste una matrice A di tipo m·n che rappresenta f, nel senso che:

$$f(x) = Ax \; \forall \; x \in R^n$$

Il teorema stabilisce una corrispondenza biunivoca tra l'insieme $f: R^n \rightarrow R^m$ e la matrice $A_{m \cdot n}$

Dimostrazione :

1) **Condizione Necessaria:**
2) **Condizione Sufficiente :**

Condizione Sufficiente:

Ipotesi		Tesi
Se *f(x)=Ax*	$\Longrightarrow$	*f*:$R^n \rightarrow R^m$ è lineare

dimostrazione:

$\forall x_1, x_2 \in R^n \quad e\ \forall \alpha, \beta \in R \qquad si\ ha\ che:$

$f(\alpha x_1 + \beta x_2) = A(\alpha x_1 + \beta x_2) = A(\alpha x_1) + A(\beta x_2) = \alpha(Ax_1) + \beta(Ax_2) =$

$= \alpha f(x_1) + \beta f(x_2)$ - abbiamo sfruttato la proprietà distributiva del prodotto rispetto alla somma-

Condizione Necessaria:

Ipotesi		Tesi
se *f*:$R^n \rightarrow R^m$ è	$\Longrightarrow$	*f(x)=Ax*

dimostrazione :

1) prendo i vettori fondamentali della base canonica :$e^1, e^2, \dots, e^n$

2) costruisco le loro immagini $f(e^1), f(e^2) \dots\dots f(e^n)$

3) chiamo le immagini $a^1, a^2, \dots\dots a^n$ in modo tale che $a^q = f(e^q)$ con q=1,2,...n

4) sapendo che ogni vettore x è esprimibile come combinazione lineare dei vettori fondamentali otteniamo che:

$$\boldsymbol{x = x_1 e^1 \cdot x_2 e^2 \dots x_n e^n = \sum_{q=1}^{n} x_q e^q}$$

5) passando alle immagini avremo:

$$\boldsymbol{f(x) = f\left(x_1 e^1 \cdot x_2 e^2 \dots x_n e^n\right) = f\left(\textstyle\sum_{q=1}^{n} x_q e^q\right)}$$

6) svolgendo alcuni passaggi:

$$\boldsymbol{f\left(\sum_{q=1}^{n} x_q e^q\right) = \sum_{q=1}^{n} f(x_q e^q) = \sum_{q=1}^{n} x_q f(e^q)}$$

7) sostituisco $f(e^q)$ con a^q e ottengo

$= \sum_{q=1}^{n} x_q\, a^q$ **= Ax dove A =**$[a^1, a^2, \ldots\ldots a^n]$ **matrice di rappresentazione di f**

OSSERVAZIONE: Condizione necessaria ma NON sufficiente affinché f sia lineare è che essa faccia corrispondere al vettore nullo di R^n il vettore nullo di R^m

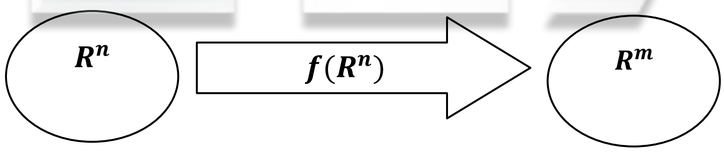
OSSERVAZIONE: data la funzione lineare $f: R^n \rightarrow R^m$, il suo insieme immagine $f(\ R^n)$ è un sottospazio di R^m

Esempi:

1) La funzione $f(x) = \begin{bmatrix} 3x & -5y & 4 \\ -x & 2y & \end{bmatrix}$= non è lineare perchè non è scrivibile nella forma $f(x) = Ax$ per colpa del 4 (termine noto)

2) La funzione $f(x) = \begin{bmatrix} 2x - y \\ 3x + 2 \end{bmatrix} =$ $è\ scrivibile$ $= \underset{\underset{x}{\Uparrow}}{\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}} \cdot \underset{\underset{\text{matrice A}}{\Uparrow}}{\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}}$ è una funzione lineare

OSSERVAZIONE: data una funzione lineare $f: R^n \rightarrow R^m$ sappiamo che il suo insieme immagine $f(R^n)$ è UN SOTTOSPAZIO di R^m la cui dimensione è uguale al rango della matrice A.



Tipologia 1) data una funzione dire per quali valori di un parametro essa è lineare

es: data $f(x) = \begin{bmatrix} 5x & -y & 3k \\ & 3x+2 & \end{bmatrix}$ dire per quali valori di k essa è lineare;

sappiamo che una funzione è lineare solo se è del tipo $f(x) = Ax$

quindi deve essere che $3\mathrm{k} = 0 \quad \rightarrow k = 0$

Tipologia 2) sia f una funzione lineare, data la matrice A e il vettore x trovare f(x)

es: $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ $x = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ per il teorema di rappresentazione se f è lineare deve essere del tipo $f(x) = Ax$ quindi moltiplico righe per colonne della matrice e del vettore x datomi dal testo ottenendo:

$$A \cdot x = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \\ 1 \end{bmatrix} = f(x)$$

Tipologia 3) data una funzione lineare, trovare la matrice A che la rappresenta

es: $f(x) = f(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}) = f\begin{bmatrix} & y \\ 3x & -y \end{bmatrix}$ sappiamo che vale $f(x) = Ax$

quindi avremo che $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$

Tipologia 4) data la matrice A e la funzione lineare trovare la dimensione dell'insieme immagine

es: data la matrice $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 2 & 2 & 4 \\ 0 & 5 & 10 \end{bmatrix}$ la dimensione sappiamo essere uguale al rango della matrice A pertanto la dimensione dello spazio immagine è =r(A)= 2 (essendo la seconda e la terza colonna proporzionali tra loro)

CALCOLO DIFFERENZIALE CON N VARIARIABILI

DERIVATE PARZIALI

Per una funzione scalare le derivate direzionali indicano la derivata nella direzione v assunta dal vettore v stesso. Particolarmente importanti sono le derivate lungo la direzione degli assi, ovvero quelle individuate dai versori e^1 = [1 0 ... 0], e^2=[0 1 ... 0] ... e^n=[0 0 ... 1]

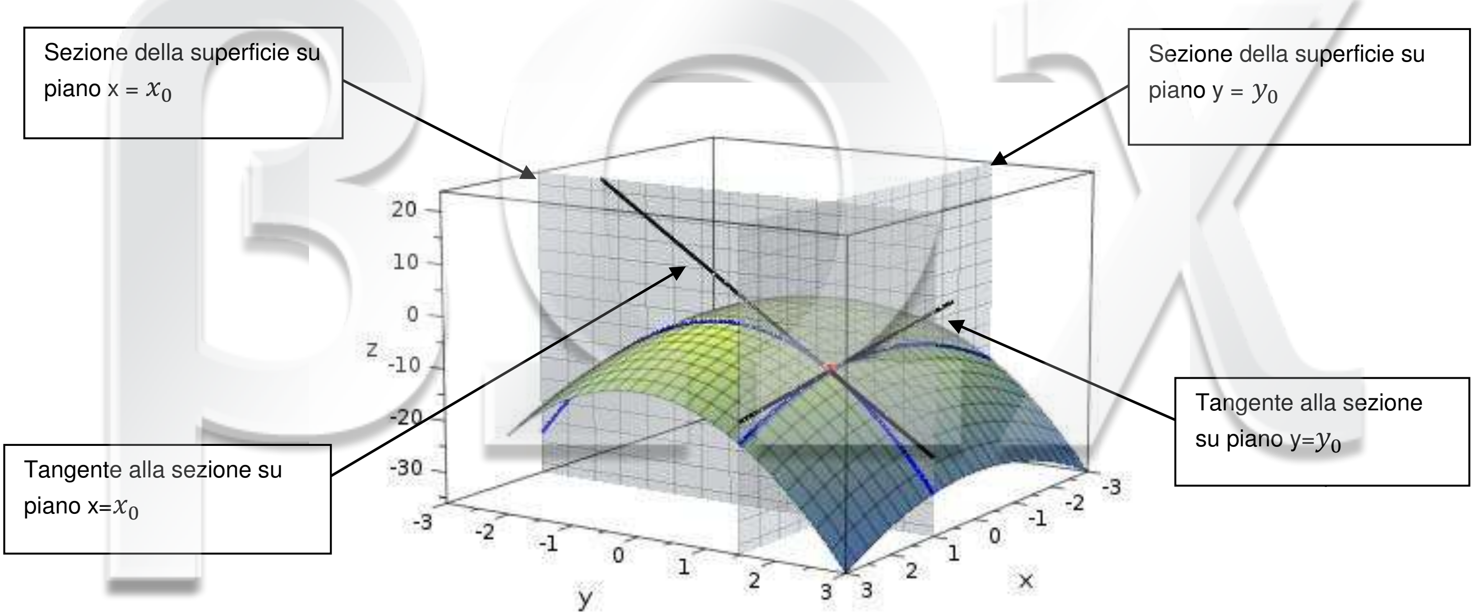
Definizione: Sia f(x,y) una funzione a due variabili definita in un insieme A ⊆ R^2 e sia (x_o, y_o) un punto interno ad A ,posto y= y_o si definisce derivata parziale prima rispetto alla variabile x ,il limite se esiste ed è finito del rapporto incrementale della funzione per h che tende a zero

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h,y_0)-(x_0,y_0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{f(\boldsymbol{x}^*+h\boldsymbol{e}^S)-f(\boldsymbol{x}^S)}{h} = f'_x\,(\boldsymbol{x}^*)$$

Dove $\boldsymbol{e}^s$ è il versore con tutte le componenti nulle tranne la s-esima.

La deriva parziale di f rispetto ad un generica variabile x_k si indica:

$$f'_{x_k}(\boldsymbol{x}) \quad \text{oppure} \quad \frac{\partial f(\boldsymbol{x})}{\partial x_k}$$



GRADIENTE di f: X ⊆ R^n → R

Definizione: data una funzione scalare di vettore f: X ⊆ R^n → R il gradiente di una funzione è definito come il vettore (convenzionalmente riga) che ha per componenti cartesiane le derivate parziali della funzione.

$$\nabla f(\boldsymbol{x}) = [\, f'_{x_1}(\mathrm{x}) \;\; f'_{x_2}(\mathrm{x}) \;\; \dots \;\; f'_{x_n}(\mathrm{x}) \,]$$

Esempio:
Calcoliamo il gradiente della funzione nel punto P_0 (2,4)

$$\mathrm{f}\,(\mathrm{x,y,z}) = \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{3} \quad => \quad \frac{\partial f}{\partial x} = 2\,; \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{2}{3} \quad => \quad \nabla f = 2x + \frac{8}{3}y$$

DERIVATE PARZIALI SECONDE E MATRICE HESSIANA

Supponiamo che f sia derivabile rispetto a x_i in tutto un intorno di x_0. Se la funzione $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ è a sua volta derivabile in x_0 rispetto a x_j, diciamo che f ammette in x_0 **derivata parziale seconda** rispetto a x_i e x_j; poniamo allora:

$$f''_{x_j x_i}(\boldsymbol{x}_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial_{x_j}\partial_{x_i}}(\boldsymbol{x}_0) = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)(\boldsymbol{x}_0)$$

Definizione: la **matrice Hessiana** è la matrice quadrata di ordine n che raccoglie le derivate parziali seconde di f:

$$\nabla^2 f(\boldsymbol{x}) = f''(\boldsymbol{x}) = H_f\,(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} f''_{x_1x_1} & \cdots & f''_{x_1x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f''_{x_nx_1} & \cdots & f''_{x_nx_n} \end{pmatrix}$$

Le derivate parziali seconde che si trovano sulla diagonale principale (indicate in rosso) si chiamano **pure**: sono le derivate parziali seconde ottenute derivando due volte rispetto alla stessa variabile. Tutte le altre derivate parziali seconde sono dette **miste** e sono ottenute derivando rispetto a variabili diverse.
Osservazione: essendo una matrice quadrata la Hessiana contiene n^2 derivate parziali seconde di f.

TEOREMA DI SCHWARZ

Sia $f : \Omega \subseteq \mathrm{R}^2 \to \mathrm{R}$ una funzione in due variabili, definita su un aperto Ω del piano R^2.
Se *f* ammette derivate seconde miste continue ($f \in C^2(\Omega)$) allora queste coincidono in ogni punto *p*, cioè:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \equiv \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}.$$

In altre parole, invertendo l'ordine di derivazione di una doppia derivazione parziale mista, il risultato non cambia.

Esempio: Data $f\,(x_1, x_2) = 6x_1x_2 + e^{2x_1}$

Le derivate parziali prime e seconde sono: $\begin{cases} f'_{x_1} = 6x_2 + 2e^{2x_1} \to \begin{cases} f''_{x_1x_1} = 4e^{2x_1} \\ f''_{x_1x_2} = 6 \end{cases} \\ f'_{x_2} = 6x_1 \to \begin{cases} f''_{x_2x_1} = 6 \\ f''_{x_2x_2} = 0 \end{cases} \end{cases}$

Quindi la matrice Hessiana è:

$$\nabla^2 f(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} 4e^{2x_1} & 6 \\ 6 & 0 \end{bmatrix}$$

MATRICE JACOBIANA

Definizione: data una funzione vettoriale $\boldsymbol{f} : A \subseteq \mathrm{R}^n \to \mathrm{R}^m$ la **matrice Jacobiana** è quella matrice ottenuta dall'accostamento dei **gradienti delle m funzioni scalari di f**

$$J[\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})] = \boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} \nabla f_1(\boldsymbol{x}) \\ \nabla f_2(\boldsymbol{x}) \\ \dots \\ \nabla f_m(\boldsymbol{x}) \end{bmatrix}$$

Minori Principali di Nord-Ovest (NW) di una Matrice Quadrata

Definizione: Sia A una matrice *n* x *n* la sottomatrice *k* x *k* ottenuta da essa eliminando le ultime *n - k* colonne e le ultime *n - k* righe, si dice sottomatrice principale di nord-ovest di A di ordine k.

Esempio:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 5 & 4 & 6 \end{bmatrix}$$

$$NW_1 : |4| = 4, \qquad NW_2 : \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 8, \qquad NW_3 : \begin{vmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 5 & 4 & 6 \end{vmatrix} = 48 - 10 = 38$$

Tabella Calcolo Derivate

Formule di derivazione

1) $y = k$	$\Rightarrow$	$y' = 0$
2) $y = kx$	$\Rightarrow$	$y' = k$
3) $y = x^{\alpha}$	$\Rightarrow$	$y' = \alpha \cdot x^{\alpha-1}$
4) $y = \sqrt{x}$	$\Rightarrow$	$y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
5) $y = \sqrt[n]{x}$	$\Rightarrow$	$y' = \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$
6) $y = e^x$	$\Rightarrow$	$y' = e^x$
7) $y = a^x$	$\Rightarrow$	$y' = a^x \cdot \ln a$
8) $y = \ln x$	$\Rightarrow$	$y' = \frac{1}{x}$
9) $y = \log_a x$	$\Rightarrow$	$y' = \frac{1}{x \ln a}$
10) $y = \mathrm{sen}x$	$\Rightarrow$	$y' = \cos x$
11) $y = \cos x$	$\Rightarrow$	$y' = -\mathrm{sen}x$

Funzione composte

$y = k \cdot f(x)$	$\Rightarrow$	$y' = k \cdot f'(x)$
$y = [f(x)]^{\alpha}$	$\Rightarrow$	$y' = \alpha \cdot f(x)^{\alpha-1} \cdot f'(x)$
$y = \sqrt{f(x)}$	$\Rightarrow$	$y' = \frac{1}{2\sqrt{f(x)}} \cdot f'(x)$
$y = \sqrt[n]{f(x)}$	$\Rightarrow$	$y' = \frac{1}{n\sqrt[n]{f(x)^{n-1}}} \cdot f'(x)$
$y = e^{f(x)}$	$\Rightarrow$	$y' = e^{f(x)} \cdot f'(x)$
$y = a^{f(x)}$	$\Rightarrow$	$y' = a^{f(x)} \cdot \ln a \cdot f'(x)$
$y = \ln f(x)$	$\Rightarrow$	$y' = \frac{1}{f(x)} \cdot f'(x)$
$y = \log_a f(x)$	$\Rightarrow$	$y' = \frac{1}{f(x) \cdot \ln a} \cdot f'(x)$
$y = \mathrm{sen}\ f(x)$	$\Rightarrow$	$y' = \cos\ f(x) \cdot f'(x)$
$y = \cos\ f(x)$	$\Rightarrow$	$y' = -\mathrm{sen}\ f(x) \cdot f'(x)$

Proprietà calcolo derivate

1) $y = f(x) \pm g(x)$	$\Rightarrow$	$y' = f'(x) \pm g'(x)$
2) $y = f(x) \cdot g(x)$	$\Rightarrow$	$y' = f'(x) \cdot g(x) + g'(x) \cdot f(x)$
3) $y = k \cdot f(x)$	$\Rightarrow$	$y' = k \cdot f'(x)$
4) $y = \frac{f(x)}{g(x)}$	$\Rightarrow$	$y' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - g'(x) \cdot f(x)}{[g(x)]^2}$

DIFFERENZIABILITA' E DIFFERENZIALE PRIMO

Primo caso: n=1 m=1 => f : R -> R

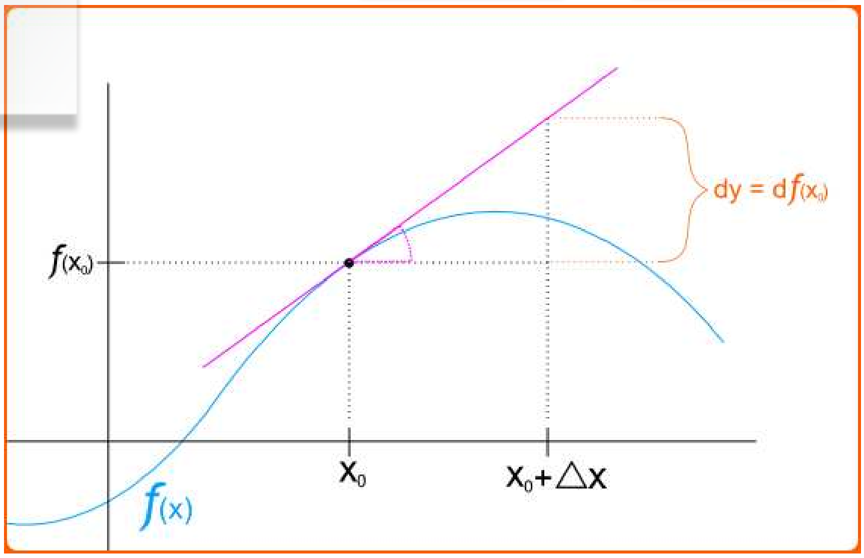
Definizione: una funzione reale di variabile reale è detta differenziabile in un punto x_0 se esiste un numero a(x_0) tale che:

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = a(x_0) \cdot h + o(h) \qquad h \to 0$$

Presupponendo l'esistenza del numero a(x_0) esso è uguale a $f'(x_0)$:

$$\Delta f = f(x_0 + h) - f(x_0) = f'(x_0) \cdot h + o(h) \qquad h \to 0$$

$df(x_0) = f'(x_0) \cdot h = f'(x_0) \cdot (x - x_0)$ è il differenziale primo di f in x_0 e o(h) è infinitesimo per h→0



Il differenziale primo identifica l'incremento subito dalla tangente dato un incremento h dato alla variabile indipendente.
Quando f è differenziabile in x_0 il suo grafico può essere approssimato con la tangente al grafico nel punto x_0 .

Formula di Taylor (1° ordine) : $f(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0) + o(x - x_0)$

Polinomio di **Taylor**: $T_1 = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$

N.B.: f(x) è differenziabile in x_0 se e solo se è ivi derivabile

Secondo caso: n>1 m=1 => f : R^2-> R

Definizione: f : R^2-> R si dice differenziabile in un punto **x** se esiste un vettore riga **a**(**x**) tale che:

$$\Delta f = f(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{h}) - f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{a}(\boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{h} + o(\|\boldsymbol{h}\|) \qquad \boldsymbol{h} \to 0$$

Se **a**(**x**) esiste è uguale al gradiente di f in **x** => $\nabla f(\boldsymbol{x})$ e quindi si ha:

$$\Delta f = f(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{h}) - f(\boldsymbol{x}) = \nabla f(\boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{h} + o(\|\boldsymbol{h}\|) \qquad \boldsymbol{h} \to 0$$

Differenziale primo

$$df(\boldsymbol{x}) = \nabla f(\boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{h} = \begin{bmatrix} f'_{x_1}(\boldsymbol{x}) & f'_{x_2}(\boldsymbol{x}) & \cdots & f'_{x_n}(\boldsymbol{x}) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_n \end{bmatrix} = f'_{x_1}(\boldsymbol{x}) \cdot h_1 + f'_{x_2}(\boldsymbol{x}) \cdot h_2 + \ldots + f'_{x_n}(\boldsymbol{x}) \cdot h_n$$

Ogni addendo dell'ultima somma è detto differenziale parziale

Osservazioni:

- Il differenziale primo svolge la migliore approssimazione lineare dell'incremento della funzione quando la variabile x_s subisce una piccola variazione h_s rispetto al suo valore iniziale.
- Se f è differenziabile in $\mathbf{x_0}$ è continua in $\mathbf{x_0}$ (non vale l'inverso: la continuità non implica la differenziabilità)
- Per n>1 se f è differenziabile in $\mathbf{x_0}$ è anche derivabile in $\mathbf{x_0}$
  (non vale l'inverso: la derivabilità non implica la differenziabilità)

Teorema: data una funzione scalare di vettore
- se ammette tutte le n derivate parziali prime
- se tutte le derivate parziali prime sono continue in $\mathbf{x_0}$

=>f è differenziabile in $\mathbf{x_0}$

Formula di Taylor arrestata al primo ordine: $f(\boldsymbol{x}) = f(\mathbf{x_0}) + \nabla f(\mathbf{x_0}) \cdot \mathbf{h} + o(\|\boldsymbol{h}\|) \qquad \boldsymbol{h} \to \mathbf{0}$

ESTREMI GLOBALI E LOCALI

Data una funzione scalare di vettore $f: X \subseteq \mathrm{R}^n \to \mathrm{R}$ con X dominio naturale di f e $\boldsymbol{x} \in X$

Massimo (minimo) globale debole:

$$f(\boldsymbol{x}^*) \geq f(\boldsymbol{x}) \quad \forall \boldsymbol{x} \in X \qquad (f(\boldsymbol{x}^*) \leq f(\boldsymbol{x}) \qquad \forall \boldsymbol{x} \in X)$$

Massimo (minimo) globale forte:

$$f(\boldsymbol{x}^*) > f(\boldsymbol{x}) \quad \forall \boldsymbol{x} \in X \;\; con\; \boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{x}^* \qquad (f(\boldsymbol{x}^*) < f(\boldsymbol{x}) \qquad \forall \boldsymbol{x} \in X \;\; con\; \boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{x}^*)$$

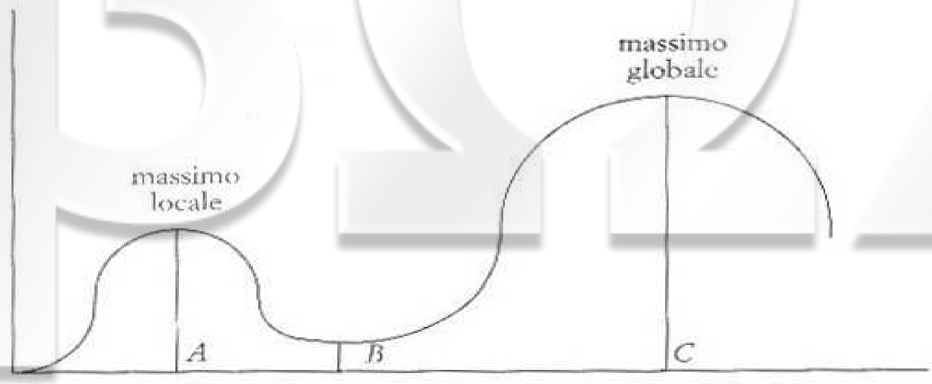
Massimo (minimo) locale debole, se esiste un intorno $U(\boldsymbol{x}^*, r)$ tale che:

$$f(\boldsymbol{x}^*) \geq f(\boldsymbol{x}) \quad \forall \boldsymbol{x} \in U \cap X \qquad (f(\boldsymbol{x}^*) \leq f(\boldsymbol{x}) \qquad \forall \boldsymbol{x} \in U \cap X)$$

Massimo (minimo) locale forte, se esiste un intorno $U(\boldsymbol{x}^*, r)$ tale che:

$$f(\boldsymbol{x}^*) > f(\boldsymbol{x}) \quad \forall \boldsymbol{x} \in U \cap X \;\; con\; \boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{x}^* \qquad (f(\boldsymbol{x}^*) < f(\boldsymbol{x}) \qquad \forall \boldsymbol{x} \in U \cap X \;\; con\; \boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{x}^*)$$

N.B.: un punto di massimo (minimo) globale per f è anche un punto di massimo (minimo) locale, ma non vale in contrario



OTTIMIZZIZAIONE LIBERA PER FUNZIONI SCALARI DI VETTORE $\quad f: \mathrm{R}^n \to \mathrm{R}$

L'ottimizzazione libera ha come obiettivo la ricerca del valore massimo e/o minimo di una funzione senza vincoli sulle variabili indipendenti $x_1, x_2, \dots, x_n$:

$$\max_{\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^n} f(\boldsymbol{x}) \quad o \quad \min_{\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^n} f(\boldsymbol{x})$$

f(**x**) è detta funzione obiettivo   **x** è detto vettore delle variabili di scelta

Condizione necessaria del primo ordine (teorema di Fermat)

Enunciato: Sia $f: X \subseteq \mathrm{R}^n \to \mathrm{R}$ dotata di derivate parziali in un punto $\boldsymbol{x}^*$ interno ad X. Se $\boldsymbol{x}^*$ è d'estremo locale per f allora il gradiente in $\boldsymbol{x}^*$ è nullo.

$$\nabla f(\boldsymbol{x}^*) = 0$$

i punti in cui il gradiente si annulla sono detti stazionari o critici per la funzione.

Dimostrazione (per $f: \mathrm{R}^2 \to \mathrm{R}$): Dato un punto (x_0, y_0) interno al dominio X, blocchiamo y_0 e lasciamo variare x. Si ottiene una nuova funzione $F(x) = f(x, y_0)$ relativa alla sola variabile x. $F(x)$ ha un estremo locale in x_0 e per il teorema unidimensionale di Fermat la derivata di F deve essere nulla in x_0.
Ma per definizione $f'_x(x_0, y_0) = F'(x_0)$ dunque $f'_x(x_0, y_0) = 0$

Osservazione: Se un punto $\boldsymbol{x}^*$ annulla il gradiente non è detto che sia di estremo locale per la funzione. Mentre non è sicuramente un punto stazionario se il gradiente è diverso da 0.

N.B.: Se il dominio X è un insieme aperto i punti di massimo e minimo globale sono da ricercare tra i punti stazionari. Mentre se X è un insieme chiuso sono da analizzare separatamente anche i punti di frontiera e i punti in cui f non è derivabile.

Esempio: Trovare i punti stazionari della funzione:

$$f(x_1, x_2) = x_1^4 + x_2^4 - 4x_1x_2$$

Gradiente della funzione: $\nabla f(x_1, x_2) = [4x_1^3 - 4x_2; \quad 4x_2^3 - 4x_1]$
I punti stazionari si ottengono imponendo: $\nabla f(x_1, x_2) = \boldsymbol{0}$ che equivale al sistema di equazioni:

$$\begin{cases} 4x_1^3 - 4x_2 = 0 \\ 4x_2^3 - 4x_1 = 0 \end{cases}$$

risolvendo il sistema si ottengono i seguenti punti stazionari:

$$\boldsymbol{x}^1 = (0,0) \qquad \boldsymbol{x}^2 = (1,1) \qquad \boldsymbol{x}^3 = (-1,-1)$$

OTTIMIZZAZIONE VINCOLATA (classica):

L'ottimizzazione vincolata ha come obiettivo la ricerca del valore massimo e/o minimo di una funzione scalare di vettore le cui variabili indipendenti $x_1, x_{2,} \dots , x_n$ sono legate da equazioni o disequazioni.

$$\boldsymbol{P}_0 : \begin{cases} \max_{\boldsymbol{x}} f(x_1, x_{2,} \dots , x_n) \\ sub \\ \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{b} \end{cases}$$

Un problema che richiede la ricerca di un valore minimo è equivalente ad un problema che richiede la ricerca di un valore massimo cambiato di segno

$$\min_{x \in R^n} f(x) \to \max_{x \in R^n} [-f(x)]$$

Identifichiamo con **n** il numero delle variabili e con **m** il numero dei vincoli.
Il numero di vincoli **m** dovrà sempre essere strettamente minore del numero delle variabili **n**.

La regione ammissibile X ⊆ A, condizionata dai vincoli, della funzione scalare $f: A \subseteq \mathrm{R}^n \to \mathrm{R}$ è:

$$X = \{\boldsymbol{x} \in A: \boldsymbol{b} - \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}\}$$

Condizione necessaria di ottimo vincolato, Funzione Lagrangiana, Moltiplicatori di Lagrange (n=2 ; m=1)

Enunciato: se il punto $(x_1^*, x_2^*) \in X$ è di massimo o minimo locale per P_0 e se $\nabla g(x_1^*, x_2^*) \neq 0$, esiste un numero reale $\boldsymbol{\lambda}^*$ tale che:

$$\nabla f(x_1^*, x_2^*) = \boldsymbol{\lambda}^* \cdot \nabla g(x_1^*, x_2^*)$$

La condizione necessaria è soddisfatta nel punto $(\boldsymbol{\lambda}, \mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2)$, se e solo se:

$$\begin{cases} f'_{x_1}(x_1, x_2) - \boldsymbol{\lambda} g'_{x_1}(x_1, x_2) = 0 \\ f'_{x_2}(x_1, x_2) - \boldsymbol{\lambda} g'_{x_2}(x_1, x_2) = 0 \\ g(x_1, x_2) = b \end{cases}$$

Il sistema esprime la condizione necessaria di ottimo libero della funzione Lagrangiana

$$L(\boldsymbol{\lambda}, x_1, x_2) = f(x_1, x_2) + \boldsymbol{\lambda} \cdot [\mathrm{b} - \mathrm{g}(x_1, x_2)]$$

Quindi la **condizione necessaria** è:

$$\nabla L(\boldsymbol{\lambda}, x_1, x_2) = \boldsymbol{0}$$

L è detta **funzione Lagrangiana**

λ è detto **moltiplicatore di Lagrange**